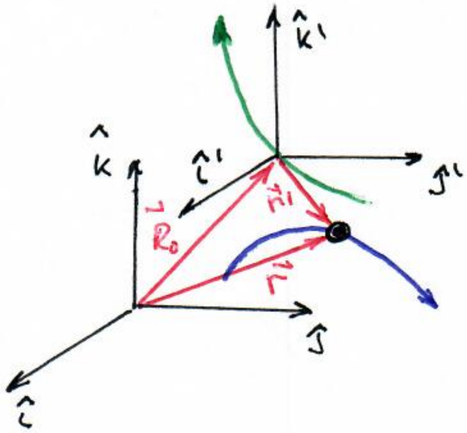
MOVIMIENTO EN UN SIST. DE REFERENCIA NO INERCIAL

★ a) CENTRO DE REFERENCIA TIENE ACELERACIÓN




$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

$$\vec{r} = \vec{R}_0 + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\vec{r}' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'$$

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \frac{d\hat{j}'}{dt} + \frac{d\hat{k}'}{dt} = 0$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}' + \dot{z}'\hat{k}'$$

$$\therefore \boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'}$$

VELOCIDAD EN EL ESPACIO

VELOCIDAD DEL ORIGEN DEL SIST. DE REFERENCIA

VELOCIDAD OBSERVADA EN EL SIST. DE REFERENCIA MÓVIL

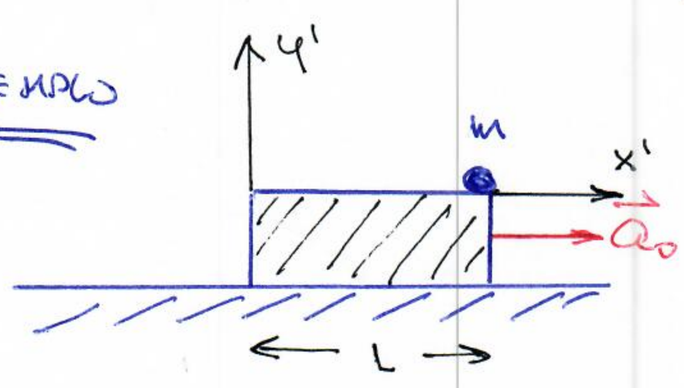
ANALOGAMENTE $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \boxed{\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'}$

$$m\vec{a} = m\vec{a}_0 + m\vec{a}' = \vec{F}$$

$$m\vec{a}' = \vec{F} + (-m\vec{a}_0)$$

FUERZA FICTICIA
EN EL SIST. MÓVIL

EJEMPLO




BLOQUE ACELERA CON $\vec{a}_0$ CONSTANTE

$t=0$ PARTÍCULA DE MASA $m$ EN EL EXTREMO DEL BLOQUE DE LARGO $L$

EN SISTEMA MÓVIL $\quad m\vec{a}' = \underbrace{m\vec{g} + \vec{N}}_{=0} + (-m\vec{a}_0)$

$$\vec{a}_0 = a_0\hat{i}' \qquad \vec{a}' = \ddot{x}'\hat{i}$$

$$\ddot{x}' = -a_0$$

$$t=0 \quad \vec{V}'_0 = 0 \qquad \vec{r}' = L\hat{i}'$$

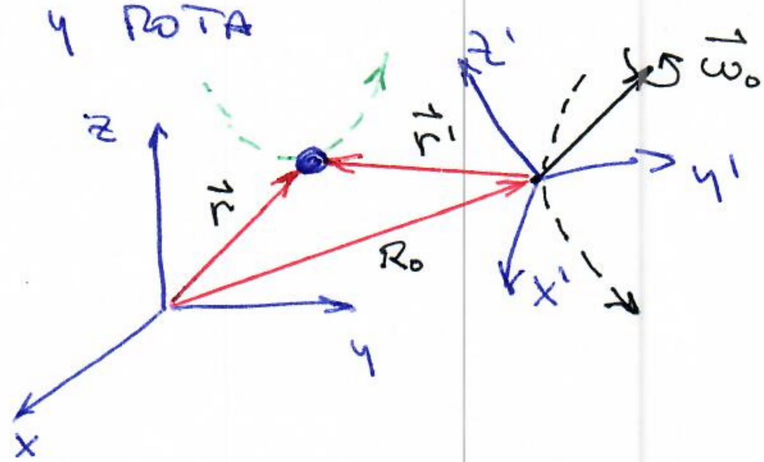
$$\dot{x}' = -a_0 t \rightarrow x' = L - \frac{a_0}{2}t^2$$

$$x'=0 \quad t^2 = \frac{2L}{a_0} \longrightarrow t^* = \left(\frac{2L}{a_0}\right)^{1/2}$$

$t^*$ : TIEMPO QUE TARDA LA PARTÍCULA AL EXTREMO IZQUIERDO

¡ EN ESTE TIEMPO LA PARTÍCULA HA PERMANECIDO EN REPOSO !

★b) SISTEMA DE REFERENCIA SE TRASLADA Y ROTA




$(x-y-z)$ SIST. DE REFERENCIA INERCIAL

$(x'-y'-z')$ SIST. DE REFERENCIA MÓVIL (SE TRASLADA Y ROTA CON VELOCIDAD ANGULAR $\vec{\omega}_0$)

TRÍADA $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ FIJA EN EL ESPACIO

" $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ ROTA CON VEL. ANGULAR $\vec{\omega}_0$

$m\vec{a} = \vec{F}$ SIST. INERCIAL

$m\vec{a}' = ¿?$ SIST. DE REFERENCIA MÓVIL

## ANÁLISIS CINEMÁTICO

$$\vec{r} = \vec{R}_0 + \vec{r}'$$

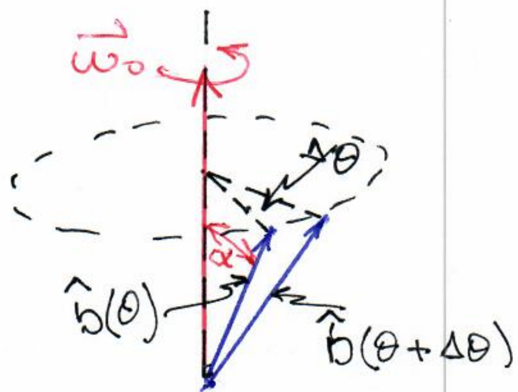
$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

↑ VELOCIDAD DEL CENTRO DEL SIST. MÓVIL

$$\vec{r}' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \underbrace{\left(\dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}' + \dot{z}'\hat{k}'\right)}_{\vec{V}'} + \left(x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt}\right)$$

$\vec{V}'$ VELOCIDAD DE LA PARTÍCULA MEDIDA EN EL SIST. MÓVIL

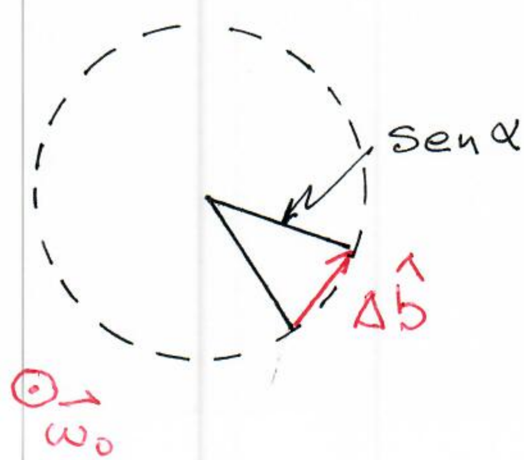



VECTOR UNITARIO $\hat{b}$ QUE ROTA CON VELOCIDAD ANGULAR $\vec{\omega}_0$

$$\frac{d\hat{b}}{dt} = \frac{d\hat{b}}{d\theta}\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{|\vec{\omega}_0|} \qquad \frac{d\hat{b}}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\hat{b}(\theta+\Delta\theta)-\hat{b}(\theta)}{\Delta\theta}$$

$$\hat{b}\cdot\hat{b} = 1 \rightarrow \frac{d}{d\theta}(\hat{b}\cdot\hat{b}) = 0 \rightarrow \boxed{\hat{b}\cdot\frac{d\hat{b}}{d\theta} = 0}$$

$$\frac{d\hat{b}}{d\theta} \perp \hat{b}$$




$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{|\Delta\hat{b}|}{\Delta\hat{\theta}} = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\left|\frac{d\hat{b}}{dt}\right| = |\hat{b}||\vec{\omega}_0| \operatorname{sen}\alpha$$

$$\boxed{\frac{d\hat{b}}{dt} = \vec{\omega}_0 \times \hat{b}}$$

$$\boxed{\frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\omega}_0 \times \hat{i}'} \quad \boxed{\frac{d\hat{j}'}{dt} = \vec{\omega}_0 \times \hat{j}'} \quad \boxed{\frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\omega}_0 \times \hat{k}'}$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}' + x'(\vec{\omega}_0 \times \hat{i}') + y'(\vec{\omega}_0 \times \hat{j}') + z'(\vec{\omega}_0 \times \hat{k}')$$

$$= \vec{v}' + \vec{\omega}_0 \times \underbrace{(x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}')}_{=\vec{r}'}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{R}_0}{dt} + \vec{v}' + \vec{\omega}_0 \times \vec{r}'}$$

VELOCIDAD REAL DE LA PARTÍCULA

VELOCIDAD DEL CENTRO DEL SIST. MÓVIL

VELOCIDAD RELATIVA AL SIST. DE REFERENCIA MÓVIL

EFECTO DE LA ROTACIÓN DEL SIST. MÓVIL

ASÍ UNA PARTÍCULA EN REPOSO ($\vec{v}=0$) ES VISTA DESDE EL SIST. MÓVIL CON VELOCIDAD:

$$\boxed{\vec{v}' = -\frac{d\vec{R}_0}{dt} - \vec{\omega}_0 \times \vec{r}'}$$

# ACELERACIÓN

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{R}_o}{dt^2} + \underbrace{\frac{d}{dt}\vec{v}'}_{\text{I}} + \underbrace{\frac{d}{dt}(\vec{\omega}_o \times \vec{r}')}_{\text{II}}$$

I $$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}' + \dot{z}'\hat{k}')$$

$$= \underbrace{(\ddot{x}'\hat{i}' + \ddot{y}'\hat{j}' + \ddot{z}'\hat{k}')}_{\vec{a}'} + \underbrace{\left(\dot{x}'\frac{d\hat{i}'}{dt} + \dot{y}'\frac{d\hat{j}'}{dt} + \dot{z}'\frac{d\hat{k}'}{dt}\right)}_{\vec{\omega}_o \times \vec{v}'}$$

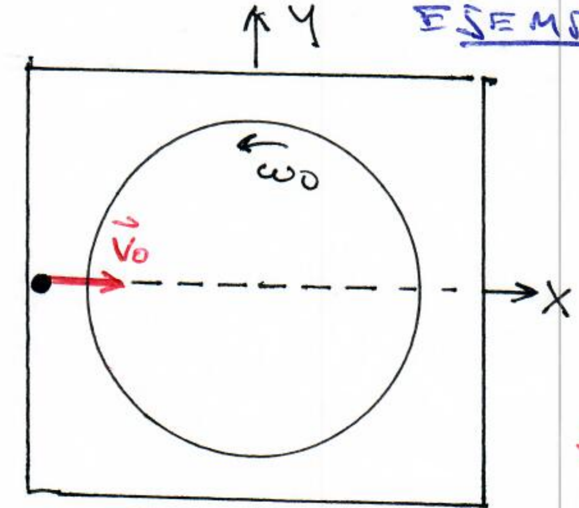
II $$\frac{d}{dt}(\vec{\omega}_o \times \vec{r}') = \dot{\vec{\omega}}_o \times \vec{r}' + \vec{\omega}_o \times \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$= \dot{\vec{\omega}}_o \times \vec{r}' + \vec{\omega}_o \times (\vec{v}' + \vec{\omega}_o \times \vec{r}')$$

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{d^2\vec{R}_o}{dt^2}}_{\vec{a}_o} + \vec{a}' + \vec{\omega}_o \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}}_o \times \vec{r}' + \vec{\omega}_o \times \vec{v}' + \vec{\omega}_o \times (\vec{\omega}_o \times \vec{r}')$$

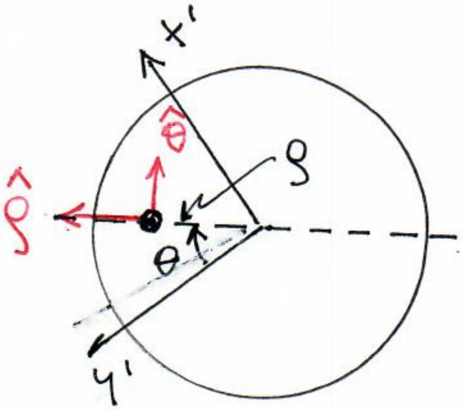
$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_o + 2\vec{\omega}_o \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}}_o \times \vec{r}' + \vec{\omega}_o \times (\vec{\omega}_o \times \vec{r}')}$$

ESEMPLO




PLATAFORMA DE RADIO R
GIRA CON VELOCIDAD ANGULAR
CONSTANTE $\omega_0$ RODEADA
POR UNA SUPERFICIE HORIZONTAL

★ NO HAY ROCE




EN SISTEMA FIJO (INERCIAL)

X-Y $\quad \vec{v} = v_0 \hat{i}$ (RECTA)

$$\vec{a} = 0$$

ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO
EN SISTEMA (X'-Y') QUE ROTA CON
VEL. ANGULAR $\omega_0$

SOLUCIÓN EN COORD POLARES, DONDE
Y' COINCIDE CON EJE POLAR

$$\rho = R - v_0 t \qquad \theta = \omega_0 t$$

$$\boxed{\rho = R - \frac{v_0}{\omega_0}\theta}$$

EC. TRAYECTORIA (ESPIRAL)

* VELOCIDAD EN SIST. DE REF. MÓVIL

$$\vec{v}' = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\,\hat{\theta} = -v_0\,\hat{\rho} + (R - V_0 t)\,\omega_0\,\hat{\theta}$$

$$|\vec{v}'| = \left[v_0^2 + \omega_0^2 (R - v_0 t)^2\right]^{1/2}$$

$|\vec{v}'|$ DISMINUYE DE $\left[V_0^2 + (\omega_0 R)^2\right]^{1/2}$ PARA $t \to 0$ A $v_0$ PARA $t = \frac{R}{V_0}$

(CUANDO LLEGA AL CENTRO DE LA PLATAFORMA)

SE DEBE CUMPLIR QUE

$$\vec{v} = \underbrace{\frac{d\vec{R}_0}{dt}}_{=0} + \vec{v}\,' + \vec{\omega}_0 \times \vec{r}\,'$$

$$-v_0\,\hat{\rho} = -v_0\,\hat{\rho} + (R - V_0 t)\,\omega_0\,\hat{\theta} + \vec{\omega}_0 \times (R - V_0 t)\,\hat{\rho}$$

$$\vec{\omega}_0 \times \hat{\rho} = -\omega_0\,\hat{\theta}$$

$$-v_0\,\hat{\rho} = -v_0\,\hat{\rho} + (R - v_0 t)\,\omega_0\,\hat{\theta} - (R - v_0 t)\,\omega_0\,\theta$$

¡ SE CUMPLE !

★ ACELERACIÓN EN EL SIST. MÓVIL

$$\vec{a}' = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

$$\boxed{\vec{a}' = -(R - v_0 t)\omega_0^2\,\hat{\rho} - 2v_0\omega_0\,\hat{\theta}} \quad \text{(I)}$$

$|\vec{a}'|$ DISMINUYE A MEDIDA QUE $t$ AUMENTA

PERO $\boxed{\vec{a} = 0}$

SE DEBE CUMPLIR QUE ...

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{a}'}_{\text{(I)}} + \underbrace{\vec{a}_0}_{=0} + \underbrace{2\vec{\omega}_0 \times \vec{v}'}_{\text{(II)}} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}}_0 \times \vec{r}'}_{=0} + \underbrace{\vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}')}_{\text{(III)}}$$

$$2\vec{\omega}_0 \times \vec{v}' = 2\vec{\omega}_0 \times \left(-v_0\hat{\rho} + (R - v_0 t)\omega_0\hat{\theta}\right]$$

$$2\vec{\omega}_0 \times \vec{v}' = 2v_0\omega_0\,\hat{\theta} + 2(R - v_0 t)\omega_0^2\,\hat{\rho} \quad \text{(II)}$$

$$\vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}') = \vec{\omega}_0 \times \left(-\omega_0 (R - v_0 t)\hat{\theta}\right)$$

$$\vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}') = -\omega_0^2 (R - v_0 t)\,\hat{\rho} \quad \text{(III)}$$

$$\text{(I)} + \text{(II)} + \text{(III)} \equiv 0$$

$\boxed{\text{SE CUMPLE !}}$