FI 2001 MECÁNICA SESIÓN 17 P.ACEITUNO 25/05/21 ①

ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO EN UN SIST. DE REFERENCIA ROTANTE

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,' + \vec{\omega}_0 \times \vec{r}\,'$$

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}}_0 \times \vec{r}\,' + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v}\,' + \vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}\,')$$

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

F. CORIOLIS

★ $$m\vec{a}\,' = \vec{F} + (-m\vec{a}_0) + m\vec{r}\,' \times \dot{\vec{\omega}}_0 + 2m\vec{v}\,' \times \vec{\omega}_0 + m(\vec{\omega}_0 \times \vec{r}\,') \times \vec{\omega}_0$$

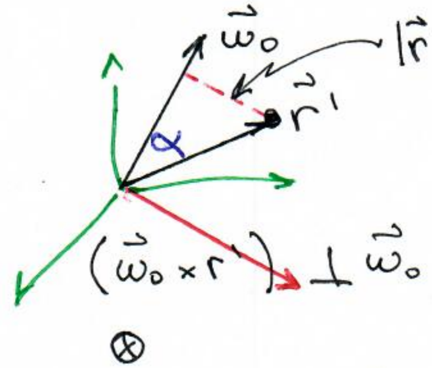
F. CENTRÍFUGA

★ "FUERZA" DE CORIOLIS: $2m\vec{v}\,' \times \vec{\omega}_0$

ES PERPENDICULAR A $\vec{v}\,'$ Y A $\vec{\omega}_0$

★ POR SER PERPENDICULAR A $\vec{v}\,'$ <u>NO</u> CAMBIA LA VELOCIDAD RELATIVA $\vec{v}\,'$

★ FUERZA CENTRÍFUGA: $m(\vec{\omega}_0 \times \vec{r}\,') \times \vec{\omega}_0$



$$|\vec{\omega}_0 \times \vec{r}\,'| = \omega_0 |\vec{r}\,'|\,\text{sen}\,\alpha$$

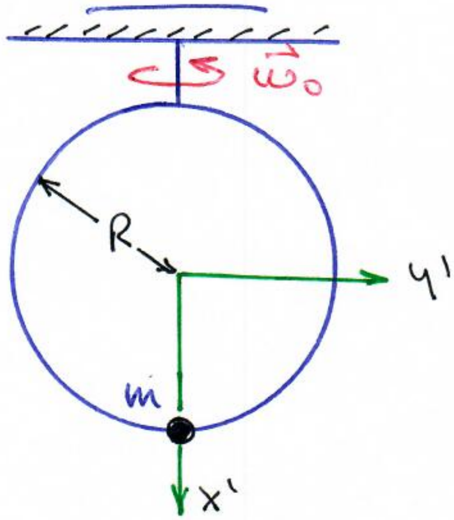
$$|m(\vec{\omega}_0 \times \vec{r}\,') \times \vec{\omega}_0| = m\omega_0^2 |\vec{r}\,'|\,\text{sen}\,\alpha$$

"FUERZA" CENTRÍFUGA ES PERPENDICULAR AL EJE DE ROTACIÓN EN DIRECCIÓN ALEJÁNDOSE DE ÉL

Y SU MAGNITUD ES IGUAL A

$m\omega_0^2 R_G$ DONDE R_G ES LA DISTANCIA DE LA PARTÍCULA AL EJE DE ROTACIÓN DEL SISTEMA MÓVIL. (RADIO DE GIRO)

EJEMPLO



ARO DE RADIO R GIRA CON VELOCIDAD ANGULAR CONSTANTE $\vec{\omega}_0$

ANILLO DE MASA m DESLIZA SIN ROCE A LO LARGO DEL ARO. INICIALMENTE SE ENCUENTRA EN REPOSO EN LA POSICIÓN $R\hat{i}'$

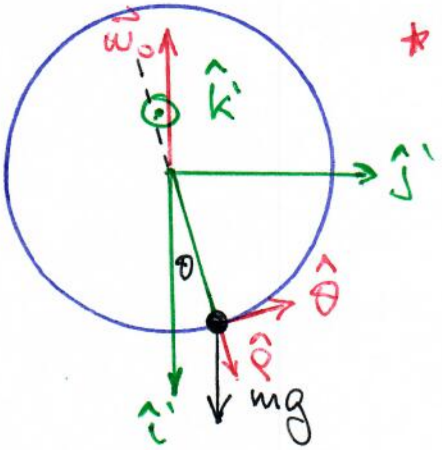
★ SISTEMA DE REFERENCIA (x', y') GIRA CON VELOCIDAD ANGULAR $\vec{\omega}_0 = -\omega_0 \hat{i}'$

★ CENTRO DEL SISTEMA NO SE MUEVE

$$\therefore \quad \vec{v}_0 = \vec{a}_0 = 0$$

EN $t=0$ SE DA UN PEQUEÑO IMPULSO AL ANILLO $\vec{v}' = v_0 \hat{j}'$

SOLUCIÓN EN EST. POLAR



* FUERZAS REALES

$$m\vec{g} = mg\cos\theta\,\hat{\rho} - mg\operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta}$$

$$\vec{N}_\rho = N_\rho\,\hat{\rho}$$

$$\vec{N}_z = N_z\,\hat{k}'$$

* FUERZAS INERCIALES O FICTICIAS

$$(-m\vec{a}_0) = 0 \qquad m\vec{r}\,' \times \dot{\vec{\omega}}_0 = 0$$

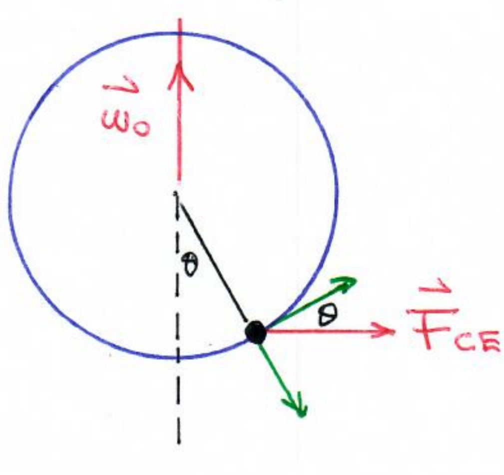
F. CORIOLIS $\vec{F}_{co} = 2m\vec{v}\,' \times \vec{\omega}_0$

$$\vec{\omega}_0 = -\omega_0\cos\theta\,\hat{\rho} + \omega_0\operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta}$$

$$\vec{v}\,' = R\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$2m\vec{v}\,'\times\vec{\omega}_0 = 2mR\dot{\theta}\,\hat{\theta}\times\left(-\omega_0\cos\theta\,\hat{\rho} + \omega_0\operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta}\right)$$

$$\vec{F}_{co} = 2m\omega_0 R\dot{\theta}\,\hat{k}'$$



$$|\vec{F}_{CE}| = m\omega_0^2 R_G = m\omega_0^2 R\operatorname{sen}\theta$$

$$\vec{F}_{CE} = (m\omega_0^2 R\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta\,\hat{\rho} + $$

$$+ (m\omega_0^2 R\operatorname{sen}\theta)\cos\theta\,\hat{\theta}$$

$$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{N}_z + \vec{N}_\rho + \vec{F}_{CO} + \vec{F}_{CE}$$

$$\vec{a}' = -R\dot{\theta}^2\,\hat{\rho} + R\ddot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\hat{\rho})\quad -mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + N_\rho + m\omega_0^2 R\,\mathrm{sen}^2\theta$$

$$\hat{\theta})\quad \cancel{m}R\ddot{\theta} = -\cancel{m}g\,\mathrm{sen}\theta + \cancel{m}\,\omega_0^2 R\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta$$

$$\hat{k}')\quad 0 = N_z + 2m\omega_0 R\dot{\theta}$$

$$\boxed{N_z = -2m\omega_0 R\dot{\theta}}$$

$$\hat{\theta})\quad \ddot{\theta} + \frac{g}{R}\mathrm{sen}\theta - \frac{\omega_0^2}{2}\mathrm{sen}2\theta = 0$$

MIENTRAS θ sea PEQUEÑO

$$\mathrm{sen}\,\theta \sim \theta$$

$$\mathrm{sen}\,2\theta \sim 2\theta$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega_0^2\right)\theta = 0$$

a) $\frac{g}{R} > \omega_0^2$

$$\ddot{\theta} + \omega_1^2\theta = 0 \qquad \text{M.A.S.}$$

$$\boxed{\omega_1^2 = \frac{g}{R} - \omega_0^2}$$

ANILLO OSCILA

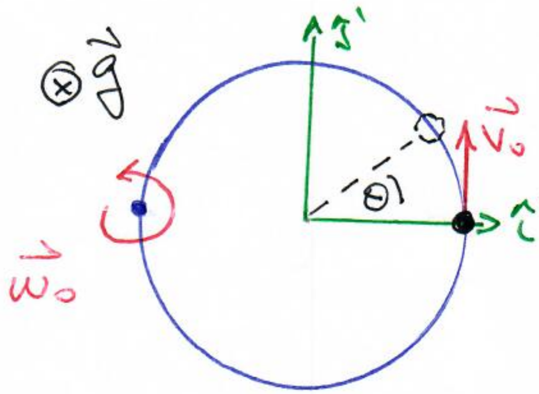
b) $\frac{g}{R} < \omega_0^2$ $\quad \ddot{\theta} - \omega_2^2 \theta = 0$

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 - \frac{g}{R}$$

$$\theta(t) = A e^{\omega_2 t} + B e^{-\omega_2 t}$$

SOLUCIÓN INESTABLE, θ CRECE EN FORMA EXPONENCIAL

EJEMPLO



PLATAFORMA CIRCULAR DE RADIO R GIRA CON VELOCIDAD ANGULAR CONSTANTE C/R A UN EJE VERTICAL QUE PASA POR EL BORDE DE LA PLATAFORMA.

UNA PARTÍCULA DE MASA m DESLIZA SIN ROCE A LO LARGO DE UN RIEL EN LA PERIFERIA DE LA PLATAFORMA

¿ QUÉ VELOCIDAD INICIAL $\vec{V}_0$ HAY ~~DE~~ QUE DAR A LA PARTÍCULA PARA QUE ALCANCE A LLEGAR AL EJE DE ROTACIÓN ?

FUERZAS REALES $m\vec{g}$ $\vec{N}_z$ $\vec{N}_\rho$

FUERZAS INERCIALES

$$m\vec{r}' \times \dot{\vec{\omega}}_0 \equiv 0$$

$$-m\vec{a}_0 = -m(-\omega_0^2 R\,\hat{i}') = m\omega_0^2 R\,\hat{i}'$$

$$\vec{F}_{CO} = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}_0$$

$$\vec{F}_{CE} = m(\vec{\omega}_0 \times \vec{r}') \times \vec{\omega}_0$$

~~EN~~ EL SIST. DE REF. $(\hat{i}', \hat{j}')$ ROTA CON VELOCIDAD ANGULAR $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \hat{k}'$

SOLUCIÓN EN SIST. DE COORD. POLARES

$$m\vec{g} = -mg\hat{k}'$$

$$\vec{N}_z = N_z \hat{k}'$$

$$\vec{N}_\rho = N_\rho \hat{\rho}$$

$$-m\vec{a}_0 = m\omega_0^2 R\,\hat{i}' = m\omega_0^2 R(\cos\theta\,\hat{\rho} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta})$$

$$\vec{F}_{CO} = 2mR\dot{\theta}\,\hat{\theta} \times \omega_0 \hat{k}' = 2m\omega_0 R\dot{\theta}\,\hat{\rho}$$

$$\vec{F}_{CE} = m\omega_0^2 R\,\hat{\rho}$$

$$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{N}_z + \vec{N}_\rho + (-m\vec{a}_0) + \vec{F}_{co} + \vec{F}_{CE}$$

$$m\vec{a}' = -mR\dot{\theta}^2\,\hat{\rho} + mR\ddot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\hat{\rho})\quad -mR\dot{\theta}^2 = N_\rho + m\omega_0^2 R\cos\theta + 2m\omega_0 R\dot{\theta} + m\omega_0^2 R$$

$$\hat{\theta})\quad \cancel{m}\cancel{R}\ddot{\theta} = -\cancel{m}\omega_0^2\cancel{R}\,\text{sen}\,\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2\,\text{sen}\,\theta$$

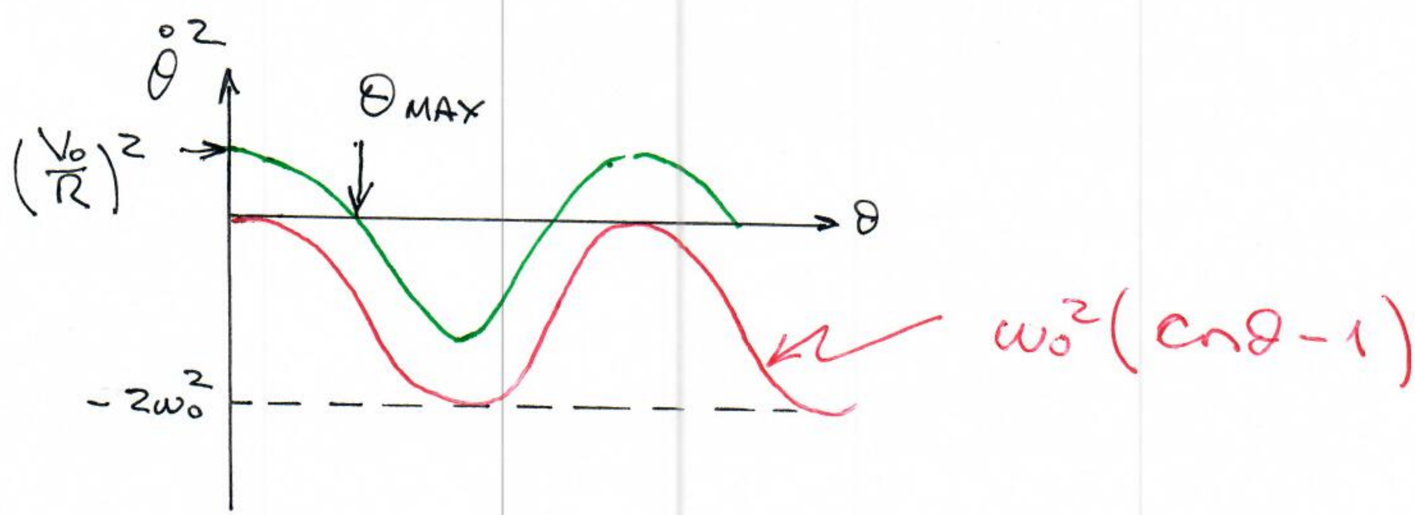
$$\dot{\theta}\,d\dot{\theta} = -\omega_0^2\,\text{sen}\,\theta$$

$$\int_{\dot{\theta}|_{t=0}}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\,d\dot{\theta} = -\int_0^{\theta}\omega_0^2\,\text{sen}\,\theta$$

$$t=0 \qquad v_0 = R\dot{\theta}\big|_{t=0} \longrightarrow \dot{\theta}\big|_{t=0} = \frac{v_0}{R}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{R}\right)^2 = \omega_0^2(\cos\theta - 1)$$

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \left(\frac{v_0}{R}\right)^2 + \omega_0^2(\cos\theta - 1)}$$



PARA QUE LA PARTÍCULA ALCANCE A LLEGAR AL EJE DE ROTACIÓN ($\theta = \pi$) $\Rightarrow \dot{\theta}\big|_{\theta=\pi} = 0$

$$0 = \left(\frac{V_0}{R}\right)^2 + \omega_0^2(-1-1)$$

$$V_0^2 = 2(\omega_0 R)^2$$

$$\boxed{V_0 = \sqrt{2}\,\omega_0 R}$$