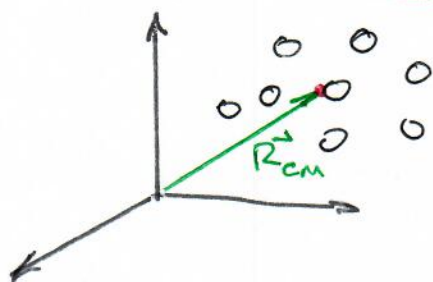


## SISTEMA DE PARTÍCULAS

ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO EN SIST. REFERENCIA INERCIAL

### ★ ANÁLISIS CINEMÁTICO



SISTEMA DE  $N$  PARTÍCULAS  
DE MASAS  $m_1, m_2, \dots, m_N$

QUE OCUPAN POSICIONES  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$

DEFINICIÓN : CENTRO DE MASA DEL SISTEMA

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M_T} \sum_{i=1}^N (m_i \vec{r}_i + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N)$$

$$M_T = \sum_{i=1}^N m_i$$

★ VELOCIDAD DEL C.M.

$$\vec{V}_{cm} = \frac{d\vec{R}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M_T} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M_T} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

★ ACCELERACIÓN DEL C.M.

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{V}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M_T} \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i$$

## MOMENTUM LINEAL DE UN S.P.

$$\vec{P}_{CM} = \sum_{i=1}^N \vec{P}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = M_T \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{M_T}}_{\vec{v}_{CM}}$$

$$\vec{P}_{CM} = M_T \vec{v}_{CM}$$

## \* DINÁMICA DE UN S.P.

CADA PARTÍCULA DE UN S.P. SE MUEVE POR ACCIÓN DE FUERZAS EXTERNAS AL S.P. (EJ. LA GRAVEDAD) Y EVENTUALMENTE POR ACCIÓN DE FUERZAS DE INTERACCIÓN CON LAS OTRAS PARTÍCULAS DEL S.P.

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO PARA PARTÍCULA "i"  
GENÉRICA

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}$$

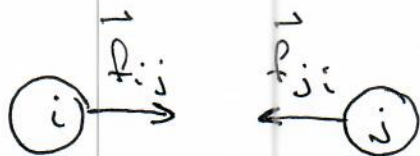
\*  $\vec{F}_i^{ext}$  = SUMA DE FUERZAS EXTERNAS QUE ACTÚAN SOBRE LA PARTÍCULA "i"

\*  $\vec{F}_i^{int} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}$   $\vec{F}_{ij}$  : FUERZA QUE PARTÍCULA "j" EJERCE SOBRE PARTÍCULA "i"

$$\begin{aligned}
 1) \quad m_1 \vec{a}_1 &= \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_1^{\text{int}} \\
 2) \quad m_2 \vec{a}_2 &= \vec{F}_2^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{int}} \\
 &\vdots \\
 N) \quad m_N \vec{a}_N &= \vec{F}_N^{\text{ext}} + \vec{F}_N^{\text{int}}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 1) \\ 2) \\ \vdots \\ N) \end{aligned}} \right\} N \text{ ECUACIONES}$$

SUMANDO LAS N ECUACIONES

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}}_{\vec{F}_i^{\text{int}}}$$



POR LA LEY DE ACCIÓN Y REACCIÓN

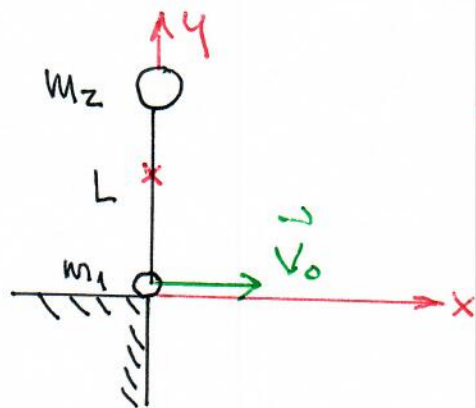
PARA CUALQUIER PAR DE PARTÍCULAS "i" y "j"

$$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$$

$$\therefore \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij} = 0$$

$$\underbrace{M_T \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i}_{M_T} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} \Rightarrow \boxed{M_T \vec{a}_{cm} = \vec{F}^{\text{ext}}}$$

★ CONCLUSIÓN : EL C.M. DE UN S.P. SE MUEVE COMO UNA PARTÍCULA DE MASA  $M_T$  COLCADA EN ESA POSICIÓN Y SOBRE LA CUAL ACTÚAN TODAS LAS FUERZAS EXTERNAS.



★ EJEMPLO : DOS PARTÍCULAS DE MASAS  $m_1$  Y  $m_2$  UNIDAS POR UNA BARRA DE MASA DESPRECABLE Y LARGO  $L$

EN  $t=0$  SE IMPULSA LA MASA  $m_1$  CON VELOCIDAD  $\vec{v}_0$  HACIA LA DERECHA

POSICIÓN Y VELOCIDAD DEL C.M. EN  $t=0$

$$\vec{R}_{0cm} = \frac{m_2 L \hat{j} + m_1 \vec{0}}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} L \hat{j}$$

$$\vec{v}_{0cm} = \frac{m_1 \vec{v}_0 + m_2 \vec{0}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 \hat{i}$$

EC. MOV. C.M.  $(m_1 + m_2) \vec{a}_{cm} = (m_1 + m_2) \vec{g}$

! LA FUERZA DE INTERACCIÓN A TRAVÉS DE LA BARRA ! NO CUENTA

$$\vec{a}_{cm} = \vec{g}$$

$$\vec{v}_{cm} = \vec{v}_{0cm} + \vec{g}t$$

$$\vec{r}_{cm} = \vec{r}_{0cm} + \vec{v}_{0cm}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1}{m_1+m_2} v_0 \hat{i} - gt \hat{j}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_2}{m_1+m_2} L \hat{j} + \frac{m_1}{m_1+m_2} v_0 t \hat{i} - \frac{g}{2} t^2 \hat{j}$$

EL MOVIMIENTO  $\uparrow$  ES PARABÓLICO  
DEL C.M.

Y SERA EL MISMO SI EN LUGAR DE  
UNA BARRA LAS DOS MASAS ESTUVIERAN  
UNIDAS POR UN RESORTE !!

### \* EJEMPLO 2

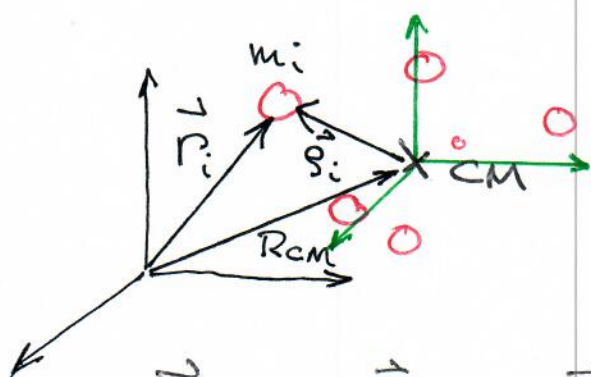
EN UNA MESA DE BILLAR SE LANZAN  
UN CONJUNTO DE BOLITAS, MIENTRAS  
QUE NINGUNA CHOQUE CON EL BORDO

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{cm} = 0$$

$\therefore \vec{v}_{cm}$  ES CONSTANTE

# MOMENTUM ANGULAR Y PORQUE

6



$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_i$$

MOMENTUM ANGULAR  
DE LA PARTÍCULA "i"

$$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^N \vec{l}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

MOMENTUM  
ANGULAR DEL  
S.P.

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum_{i=1}^N \left( \underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i}_{=0} + \vec{r}_i \times m_i \underbrace{\frac{d\vec{v}_i}{dt}}_{\vec{a}_i} \right)$$

PERO...  $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}$

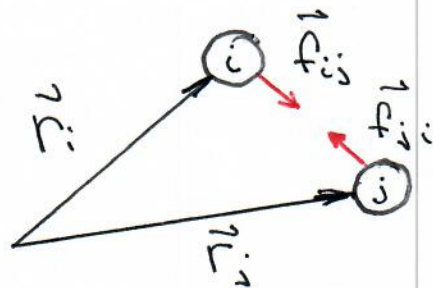
$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \left( \vec{F}_i^{ext} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij} \right)$$

ANALIZAMOS EL TÉRMINO

$$\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}$$

CONSIDEREMOS DOS

PARTÍCULAS CUALQUIERA "i" y "j"



¿CUÁNTO VALE

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} ?$$

COMO  $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$  (ACCIÓN Y REACCIÓN)

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} &= \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} - \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} \\ &= (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0 \end{aligned}$$

↑  
↑  
VECTORES ALINEADOS

SI ESTO ES VÁLIDO

PARA UN PAR CUALQUIERA  $m_i = m_j$

$$\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij} = 0$$

# \* CONCLUSION

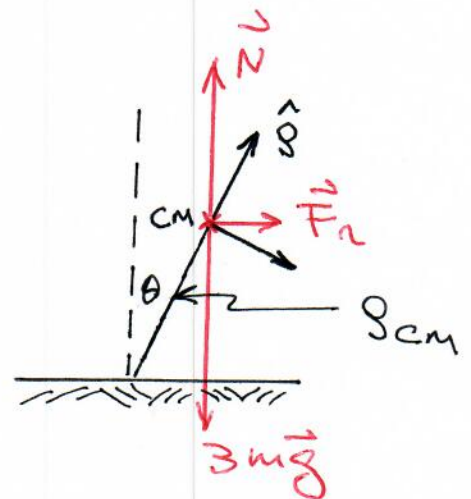
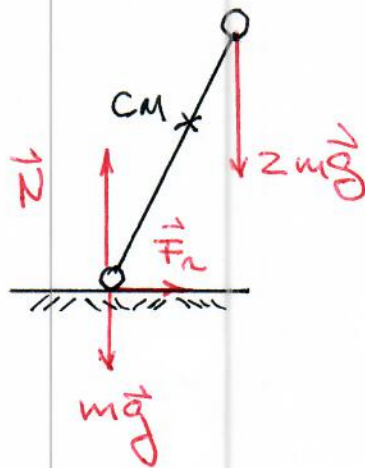
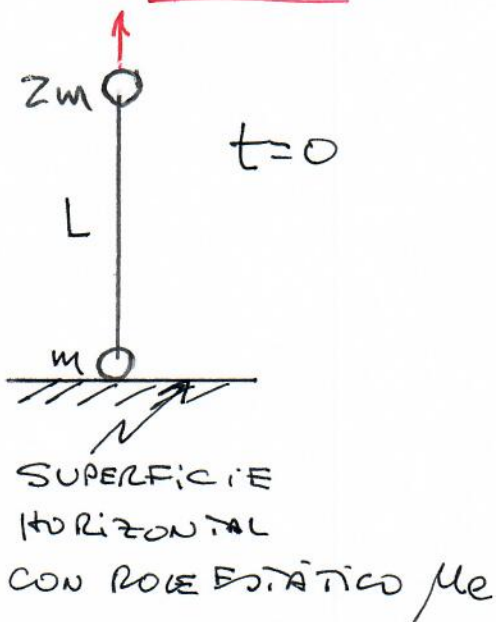
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}$$

(8)

$$\left| \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O^{ext} \right|$$

TORQUE DE LAS FUERZAS EXTERNAS C/R AL ORIGEN

## EJEMPLO:



## FUERZAS EXTERNAS

\* CUANDO  $m$  EMPIEZA A DESLIZAR?

- $mg$  SOBRE MASA  $m$
- $2mg$  " "  $2m$
- NORMAL  $N$  SOBRE MASA  $m$
- F. ROCE  $F_r$  " " "

$t=0$

$$y_{cm} = \frac{1}{m+2m} (2m L \hat{j} + m \vec{0}) = \frac{2}{3} L \hat{j}$$

$$\therefore \rho_{cm} = \frac{2}{3} L$$

(9)

MIENTRAS LA MASA "m" NO DESLICE  
 SOBRE LA SUPERFICIE EL C.M. DESCRIBE  
 UN CÍRCULO DE RADIO  $\frac{2}{3}L$

EC. DE MOVIMIENTO DEL C.M.  
 EN COORD. POLARES

$$M_T \vec{a}_{cm} = \vec{F}_{ext}$$

$$3m \vec{a}_{cm} = 3m \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_n = \vec{F}_{ext}$$

$$\vec{a}_{cm} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \hat{\rho} + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) \hat{\theta}$$

$\uparrow$   
 $=0$ 
 $\uparrow$   
 $=0$

$$\vec{a}_{cm} = -\rho_{cm} \dot{\theta}^2 \hat{\rho} + \rho_{cm} \ddot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\vec{g} = -g \cos \theta \hat{\rho} + g \sin \theta \hat{\theta}$$

$$\vec{N} = N \cos \theta \hat{\rho} - N \sin \theta \hat{\theta}$$

$$\vec{F}_n = F_n \sin \theta \hat{\rho} + F_n \cos \theta \hat{\theta}$$

$$\begin{aligned}
 -3m \rho_{cm} \dot{\theta}^2 \hat{\rho} + 3m \rho_{cm} \ddot{\theta} \hat{\theta} &= -3mg \cos \theta \hat{\rho} + 3mg \sin \theta \hat{\theta} \\
 &+ N \cos \theta \hat{\rho} - N \sin \theta \hat{\theta} + \\
 &+ F_n \sin \theta \hat{\rho} + F_n \cos \theta \hat{\theta}
 \end{aligned}$$

$$\hat{p}) -3m \frac{2}{3} L \dot{\theta}^2 = N \cos \theta + F_r \sin \theta - 3mg \cos \theta$$

$$\hat{\theta}) 3m \frac{2}{3} L \ddot{\theta} = -N \sin \theta + F_r \cos \theta + 3mg \sin \theta$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\tau}_0^{\text{ext}}$$

$$\vec{L}_0 = \sum \vec{r}_i \times m \vec{v}_i = L \hat{p} \times \underbrace{2m L \dot{\theta} \hat{\theta}}_{\vec{v}}$$

LA PARTÍCULA M SE  
MANTIENE EN EL ORIGEN MIENTRAS NO  
SE DESPLAZA

$$\vec{L}_0 = 2m L^2 \dot{\theta} \hat{k}$$

$$\therefore \frac{d\vec{L}_0}{dt} = 2m L^2 \ddot{\theta} \hat{k}$$

$$\vec{\tau}_0^{\text{ext}} = 2mg L \sin \theta \hat{k}$$

(EJERCIDO POR  
EL PESO DE LA  
PARTÍCULA 2m)

$$\therefore 2m L^2 \ddot{\theta} = 2mg L \sin \theta$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{g}{L} \sin \theta}$$

$$\int_0^{\dot{\theta}} \ddot{\theta} d\dot{\theta} = \int_0^{\theta} \frac{g}{L} \sin \theta d\theta$$

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{g}{L} (1 - \cos \theta) \rightarrow \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{L} (1 - \cos \theta)}$$

REEMPLAZANDO  $\dot{\theta}$  Y  $\dot{\theta}^2$  EN EC.  $\hat{p}$  Y  $\hat{\theta}$

$$\hat{p}) - 2mL \left[ \underbrace{\frac{2g}{L} (1 - \cos \theta)}_{\dot{\theta}^2} \right] = N \cos \theta + F_n \sin \theta - 3mg \cos \theta$$

$$\hat{\theta}) 2mL \left[ \frac{g}{L} \sin \theta \right] = -N \sin \theta + F_n \cos \theta + 3mg \sin \theta$$

$$\text{EC. } \hat{p} \times \sin \theta + \text{EC. } \hat{\theta} \times \cos \theta$$

$$-4mg(1 - \cos \theta) \sin \theta + 2mg \sin \theta \cos \theta = F_n$$

$$\boxed{F_n = mg \sin \theta (6 \cos \theta - 4)}$$

REEMPLAZANDO  $F_n$  EN EC.  $\hat{\theta}$  SE

OBTIENE  $N$

$$\boxed{N = mg [(6 \cos \theta - 4) \cos \theta + 1]}$$

EN  $t=0$   $\theta=0$

$$F_n = 0 \quad \checkmark$$

$$N = 3mg \quad \checkmark$$

OK!

LA PARTÍCULA "m" NO SE  
DESPLAZA MIENTRAS  $|\vec{F}_n| \leq \mu_e N$

$\therefore \theta^*$  CRÍTICO

★  $|\rho \sin \theta^* (6 \cos \theta^* - 4)| = \mu_e |[(6 \cos \theta^* - 4) \cos \theta^* + 1]|$