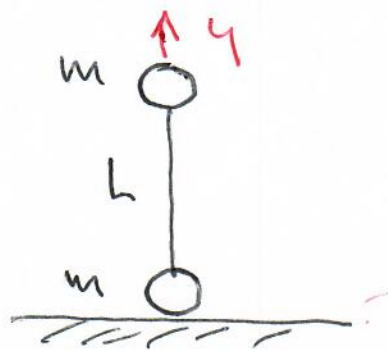


MOVIMIENTO PLANO S.P. RÍGIDO

★ EJEMPLO



BARRA DE MASA DESPRECIBLE
CON DOS PARTÍCULAS DE MASA
 m C/U EN SUS EXTREMOS
EN EQUILIBRIO VERTICAL
SOBRE UNA SUPERFICIE HORIZ.
SIN ROCE

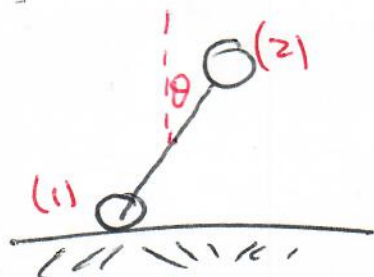
$$t=0 \quad y_{cm} = \frac{L}{2}$$

LA BARRA PIERDE EL EQUILIBRIO Y CAE
PARA QUE ANGULO θ^* LA MASA INFERIOR
PIERDE CONTACTO CON LA SUPERFICIE

★ ECS. DE MOVIMIENTO

$$\rightarrow 2m \ddot{y}_{cm} = N - 2mg$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{\tau}_{cm}^{ext}$$



$$\vec{L}_{cm} = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{p}_2$$

$$\vec{L}_{cm} = r_1 \hat{r}_1 \times m_1 (r_1 \dot{\theta}) \hat{\theta}_1 + r_2 \hat{r}_2 \times m_2 (r_2 \dot{\theta}) \hat{\theta}_2$$

$$\boxed{\vec{L}_{cm} = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \dot{\theta} \hat{k}}$$

$$m_1 \rho_1^2 + m_2 \rho_2^2 = 2m \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{2} \quad (2)$$

$$\therefore \left| \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \frac{mL^2}{2} \ddot{\theta} \hat{k} \right|$$

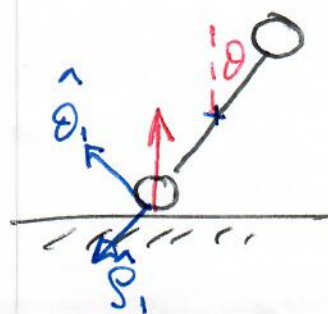
$$\vec{\tau}_{cm}^{ext} = \vec{\rho}_1 \times \vec{N}$$

(RECORDAR QUE LAS FUERZAS GRAVITACIONALES NO EJERCEN TORQUE)!!

$$\vec{N} = -N \cos \theta \hat{\rho}_1 + N \sin \theta \hat{\theta}_1$$

$$\vec{\tau}_{cm}^{ext} = \underline{\rho_1 \hat{\rho}_1 \times (-N \cos \theta \hat{\rho}_1 + N \sin \theta \hat{\theta}_1)}$$

$$\left| \vec{\tau}_{cm}^{ext} = \frac{L}{2} N \sin \theta \hat{k} \right|$$



$$\frac{mL^2}{2} \ddot{\theta} = \frac{L}{2} N \sin \theta$$

$$(1) \left| m L \ddot{\theta} = N \sin \theta \right|$$

MOV. VERTICAL DEL C.M.

$$y_{cm} = \rho_1 \cos \theta = \frac{L}{2} \cos \theta$$

$$\dot{\varphi}_{cm} = -\frac{L}{2} \sin \theta \dot{\theta}$$

$$Y_{cm} = -\frac{L}{2} \cos \theta \ddot{\theta}^2 - \frac{L}{2} \sin \theta \ddot{\theta}$$

$$\star \quad 2m \ddot{y}_{cm} = N - 2mg$$

$$(2) \quad -mL \cos \theta \ddot{\theta}^2 - mL \sin \theta \ddot{\theta}^0 = K - 2mg$$

*** ENERGIA MECÂNICA TOTAL SE MANTÉM**

$$H = K + V_G = mgl$$

EN. POTENCIAL EN $t=0$

$$\rightarrow K = \frac{1}{2} M_T v_{cm}^2 + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

$$\rightarrow V_G = M_T g y_{cm}$$

$$m v_{cm}^2 + 2 \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{L}{2} \dot{\theta} \right)^2 \right] + \cancel{2mg} \frac{\cancel{L}}{2} \cos \theta = mgl$$

$$\cancel{m} \frac{\cancel{L}^2}{4} \cancel{m} \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{\cancel{m} \cancel{L}^2}{4} \dot{\theta}^2 = \cancel{m} g \cancel{L} (1 - \cos \theta)$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{L} \frac{(1 - \cos\theta)}{(1 + \sin^2\theta)}$$

REEMPLAZANDO

$$\textcircled{1} \quad mL\ddot{\theta} = N \sin\theta \quad \text{EN EC } \textcircled{2}$$

$$\text{y } \dot{\theta}^2 \quad \text{EN EC. } \textcircled{2'}$$

$$-mL \cos\theta \frac{4g(1 - \cos\theta)}{L(1 + \sin^2\theta)} - \sin\theta(N \sin\theta) = N - 2mg$$

$$2mg \left[1 - \frac{2 \cos\theta(1 - \cos\theta)}{1 + \sin^2\theta} \right] = N [1 + \sin^2\theta]$$

$$N = 2mg \frac{(\cos^2\theta - 2\cos\theta + 2)}{(1 + \sin^2\theta)^2}$$

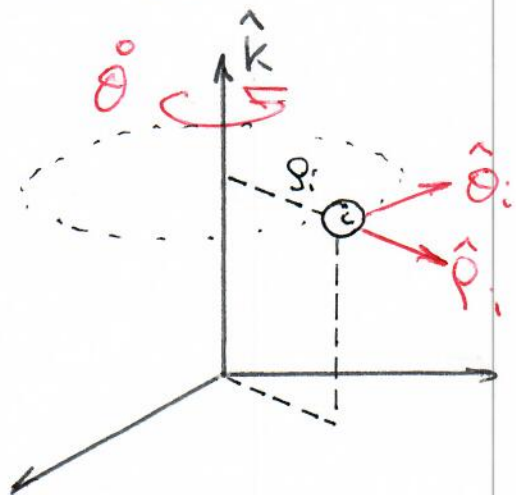
$$\theta = 0 \quad N = 2mg$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad N = mg$$

¡¡ LA PARTÍCULA INFERIOR NO SE DESPEGA !!

⑤

* CASO PARTICULAR
 SISTEMA DE PARTICULAS RÍGIDO
 QUE GIRA ALREDEDOR DE UN EJE
 FIJO



Si el eje de rotación
 del sistema es \hat{k}
 la partícula "i"
 del S.P. describe
 un círculo de radio
 ρ_i

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{L}_i = (\rho_i \hat{\rho}_i + z_i \hat{k}) \times m_i \rho_i \dot{\theta} \hat{\theta}_i$$

$$\vec{L}_i = m_i \rho_i^2 \dot{\theta} \hat{k} + m_i \rho_i z_i \dot{\theta} (-\hat{\rho}_i)$$

$$\vec{L}_o = \left(\sum m_i \rho_i^2 \right) \dot{\theta} \hat{k} - \left(\sum m_i \rho_i z_i \hat{\rho}_i \right) \dot{\theta}$$

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{\tau}^{ext} \cdot \hat{k}$$

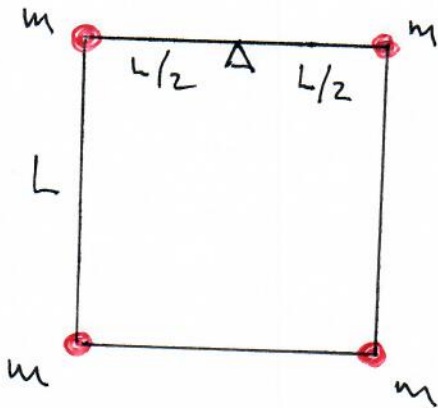
$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} \cdot \hat{k} = \frac{d}{dt} (\vec{L}_0 \cdot \hat{k})$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \ddot{\theta}$$

$I_0 \equiv$ MOMENTO DE INERCIA DEL S.P. \hat{k}
C/R AL EJE DE ROTACION \hat{k}

$$I_0 \ddot{\theta} = \vec{\tau}_0^{\text{ext}} \cdot \hat{k}$$

★ EJEMPLO



EN ESTE CASO

LAS FUERZAS

EXTERNAS SON

LA GRAVEDAD Y LA FUERZA
EN EL PUNTO DE APOYO

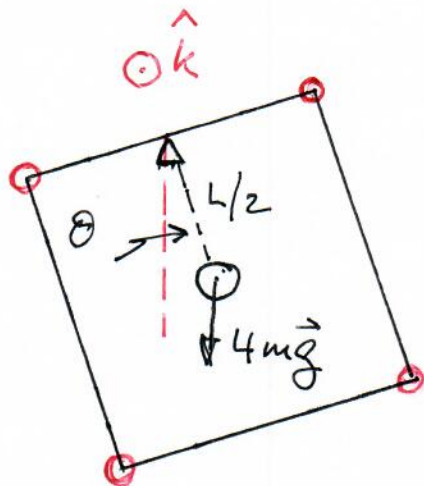
TORQUE ASOCIADO A LA GRAVEDAD

$$\vec{\tau}_0^g = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \left(\sum m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{g}$$

$$| \vec{\tau}_0^g = \vec{R}_{cm} \times M \vec{g} |$$

(7)

Es EQUIVALENTE AL TORQUE EJERCIDO
POR UNA PARTÍCULA DE MASA M_T
COLOCADA EN EL C.M



$$\vec{\tau}_0^g = \frac{L}{2} \hat{p} \times 4mg (\cos\theta \hat{p} - \sin\theta \hat{k})$$

$$\vec{\tau}_0^g = -2mgL \sin\theta \hat{k}$$

$$I_0 \ddot{\theta} = \vec{\tau}_0^g \cdot \hat{k}$$

$$I_0 = \sum m_i r_i^2$$

$$= 2m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + 2m\left[\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + L^2}\right]^2$$

$$I_0 = 3mL^2$$

EC. DE MOVIMIENTO

$$3mL^2 \ddot{\theta} = -2mgL \sin\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{3} \frac{g}{L} \sin\theta = 0$$

PEQUEÑAS OSCILACIONES

θ pequeño

$\sin \theta \approx \theta$

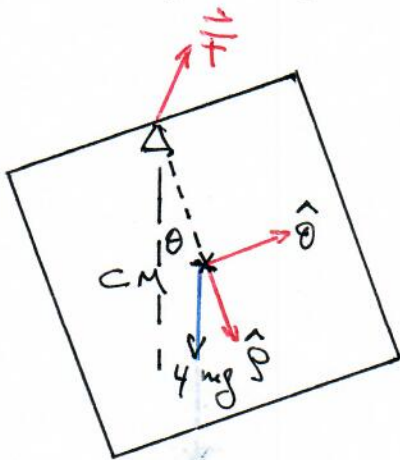
$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{2}{3} \frac{g}{L}}_{\omega_0^2} \theta = 0$$

$$\rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{2}{3} \frac{g}{L}$$

$$\rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{3L}{2g}}$$

★ CÁLCULO DE LA FUERZA EN EL PUNTO DE APOYO DE LA ESTRUCTURA



EC. MOV. DEL C.M.

$$M_T \vec{a}_{cm} = M_T \vec{g} + \vec{F}$$

$$\vec{a}_{cm} = -\frac{L}{2} \dot{\theta}^2 \hat{p} + \frac{L}{2} \ddot{\theta} \hat{\theta}$$

$$4m\vec{g} = 4mg \cos \theta \hat{p} - 4mg \sin \theta \hat{\theta}$$

$$\vec{F} = F_p \hat{p} + F_\theta \hat{\theta}$$

$$\hat{p}) -4m \frac{L}{2} \dot{\theta}^2 = 4mg \cos \theta + \overline{F}_p$$

$$\hat{\theta}) 4m \frac{L}{2} \ddot{\theta} = -4mg \sin \theta + \overline{F}_\theta$$

DE LA EC. $I_0 \ddot{\theta} = \hat{r}^{\text{ext}} \cdot \hat{k}$ DEDUCIMOS

QUE ... $\ddot{\theta} = -\frac{2}{3} \frac{g}{L} \sin \theta$

$$\dot{\theta} d\dot{\theta} = -\frac{2}{3} \frac{g}{L} \sin \theta d\theta$$

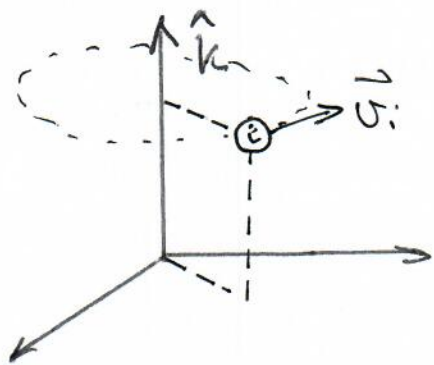
INTEGRANDO $\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \dot{\theta}_{t=0}^2 = \frac{2}{3} \frac{g}{L} (\cos \theta - \cos \theta_0)$

\uparrow C.I. \uparrow C.I.

REEMPLAZANDO $\dot{\theta}^2$ Y $\ddot{\theta}$ EN LAS
 ECUACIONES $\hat{p})$ Y $\hat{\theta})$ SE DETERMINA
 \overline{F}_p Y \overline{F}_θ

★ CONSIDERACIONES DE ENERGÍA.

S.P. RÍGIDO ROTANDO C/R A EJE FIJO



SUPONGAMOS QUE EL
S.P. ROTA C/R AL EJE \hat{k}
LA VELOCIDAD DE LA
PARTÍCULA "i" ES $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$$

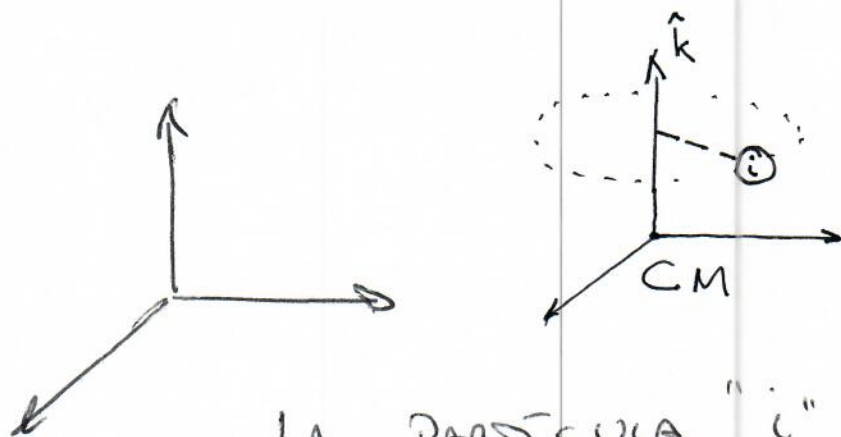
$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\sum m_i r_i^2}_{I_0} \right) \dot{\theta}^2$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2}$$

★ MOVIMIENTO PLANO DE UN SISTEMA RÍGIDO DE PARTÍCULAS

$$\forall i: \vec{v}_i \cdot \hat{k} = 0 \Rightarrow \text{TODAS LAS}$$

PARTÍCULAS SE MUEVEN EN PLANOS
PERPENDICULARES A LA DIRECCIÓN \hat{k}



11

LA PARTÍCULA "i" DEL S.P. GIRA
C/R. AL EJE \hat{k} QUE PASA POR EL C.M.
EL CUAL A LA VEZ SE DESPLAZA
EN UN PLANO \perp A \hat{k}

EC. MOV. $\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{\tau}_{ext, CM}$

$$\vec{L}_{CM} = \sum \vec{r}_{i'} \times m_i \vec{v}_{i'}$$

$\vec{r}_{i'}$: POSICIÓN DE LA PARTÍCULA "i" C/R
AL SIST. DE REFERENCIA MÓVIL
CUYO ORIGEN ESTÁ EN EL C.M.

$\vec{v}_{i'}$: VELOCIDAD RELATIVA DE LA PART.
"i" EN EL SIST. DE REFERENCIA
MÓVIL,

$$\vec{r}_{i'} = \rho_{i'} \hat{\rho}_{i'} + z_{i'} \hat{k}'$$

$$\vec{v}_{i'} = \dot{\rho}_{i'} \hat{\rho}_{i'} + \dot{z}_{i'} \hat{k}'$$

UTILIZANDO LA METODOLOGIA YA DESCRITA SE CONCLUYE QUE

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} \cdot \hat{k}' = \vec{\tau}_{cm}^{ext} \cdot \hat{k}'$$

$$\left(\sum m_i r_i'^2 \right) \ddot{\theta} = \tau_{cm}^{ext} \cdot \hat{k}'$$

MOMENTO DE INERCIA
 I_{cm} C/A A EJE QUE PASA
POR EL C.M.

★ CONSIDERACIONES DE ENERGÍA

$$K = \frac{1}{2} M_T v_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

EN ESTE CASO $\dot{\vec{r}}_i = r_i' \dot{\theta} \hat{\theta}_i'$

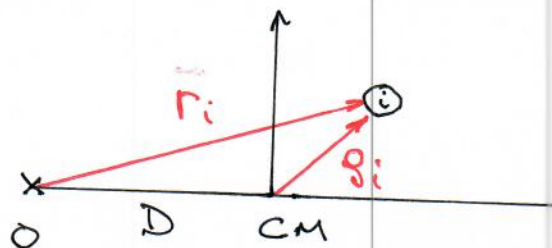
$$\therefore \sum \frac{1}{2} m_i r_i'^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left[\sum m_i r_i'^2 \right]}_{I_{cm}} \dot{\theta}^2$$

$$\left| K = \frac{1}{2} M_T v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \dot{\theta}^2 \right|$$

TEOREMA DE STEINER

13

MOMENTO DE INERCIA C/R A UN EJE
PARALELO A OMO QUE PASA POR EL
CENTRO DE MASA



EJE 1 : PASA x EL C.M.

EJE 2 : PASA x O y
ES PARALELO AL
EJE 1

$$I_{cm} = \sum m_i p_i^2$$

$$p_i^2 = x_i^2 + y_i^2$$

$$I_o = \sum m_i r_i^2$$

$$r_i^2 = (D + x_i)^2 + y_i^2$$

$$I_o = \sum_{i=1}^N m_i (D^2 + 2Dx_i + x_i^2 + y_i^2)$$

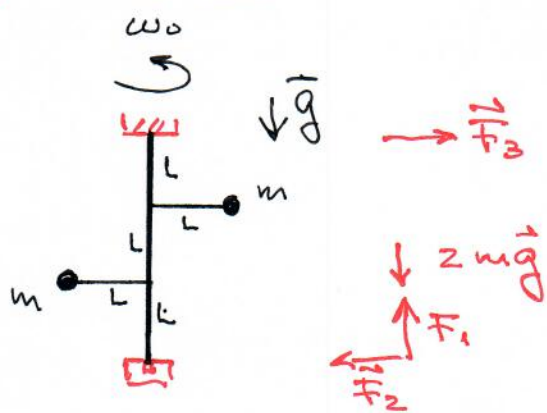
$$I_o = M_T D^2 + 2D \sum_{i=1}^N m_i x_i + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2)}_{I_{cm}}$$

RECORDAR QUE $\sum_{i=1}^N m_i \vec{p}_i = 0$

$$\underbrace{\sum m_i x_i \hat{i}}_{=0} + \underbrace{\sum m_i y_i \hat{j}}_{=0} + \underbrace{\sum m_i z_i \hat{k}}_{=0} = 0$$

$$I_o = M_T D^2 + I_{cm}$$

★ EJEMPLO



LA ESTRUCTURA ROTTA CON VELOCIDAD ANGULAR ω_0

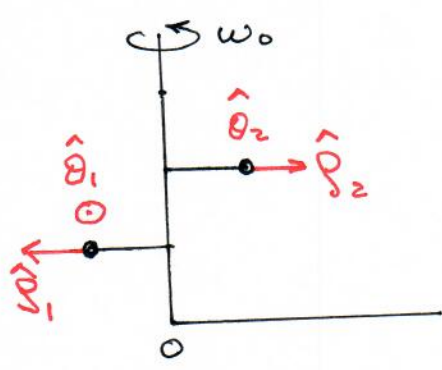
NO HAY ROCE EN LOS PUNTOS DE APOYO

CALCULAR LA MAGNITUD DE $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$

$$2m \vec{a}_{cm} = 0 = 2m\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\hat{k}) \quad 2m\vec{g} + \vec{F}_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{F}_1 = -2m\vec{g}}$$

$$\text{PLANO X-Y} \quad \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{F}_3 = -\vec{F}_2}$$



$$\boxed{I_0 = 2mL^2}$$

$$I_0 \ddot{\theta} = \vec{r}_{ext} \cdot \hat{k}$$

\vec{F}_1 y \vec{F}_2 NO EJERCE TORQUE CON RESPECTO AL ORIGEN O

$2m\vec{g}$ NO EJERCE TORQUE c/r A O

$$\text{TORQUE EJERCIDO POR } \vec{F}_3 = 3L \hat{k} \times \vec{F}_3$$

$$\vec{r}_0 \cdot \vec{F}_3 \cdot \hat{k} = 0$$

$$\therefore I_0 \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} \text{ es constante}$$

★ Si NO HAY ROCE LA ESTRUCTURA

SE MANTIENE ROTANDO CON VEL.
ANGULAR ω_0 CONSTANTE

CÁLCULO DE LA FUERZA \vec{T}_3

$$\begin{aligned} \vec{L}_0 &= \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \\ &= (L\hat{e}_1 + L\hat{k}) \times mL\dot{\theta}\hat{e}_1 + (L\hat{e}_2 + 2L\hat{k}) \times mL\dot{\theta}\hat{e}_2 \end{aligned}$$

$$\vec{L}_0 = mL^2\dot{\theta}\hat{k} + mL^2\dot{\theta}\hat{e}_1 + mL^2\dot{\theta}\hat{k} - 2mL^2\dot{\theta}\hat{e}_2$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\tau}_0^{ext}$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = -mL^2\dot{\theta} \frac{d\hat{e}_1}{dt} - 2mL^2\dot{\theta} \frac{d\hat{e}_2}{dt}$$

$$\frac{d\hat{e}_1}{dt} = \dot{\theta} \hat{e}_2 \quad \frac{d\hat{e}_2}{dt} = -\dot{\theta} \hat{e}_1$$