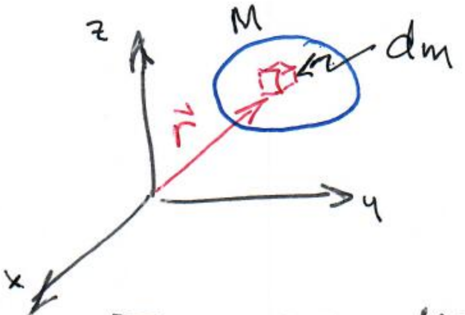


DINÁMICA DE UN SÓLIDO

EC. DE MOVIMIENTO PARA ELEMENTO "dm" QUE SE ENCUENTRA EN LA POSICIÓN "$\vec{r}$"

$$dm\,\ddot{\vec{r}} = \vec{F}^{ext}dm + \vec{F}^{int}dm$$

$\vec{F}^{ext}$: fuerza gravitacional, magnética y otras si el elemento dm está en la superficie del sólido (ROCE, fuerzas normales + otras acciones (POR UNIDAD DE MASA)

$\vec{F}^{int}$: fuerzas a nivel molecular con los elementos dm vecinos (POR UNIDAD DE MASA)

$$\int_V \ddot{\vec{r}}\,dm = \int_V \vec{F}^{ext}dm + \int_V \vec{F}^{int}dm$$

LAS INTEGRALES (SUMA) SE HACEN SOBRE EL VOLUMEN DEL CUERPO

$$\int_V \vec{F}^{int}dm \equiv 0$$

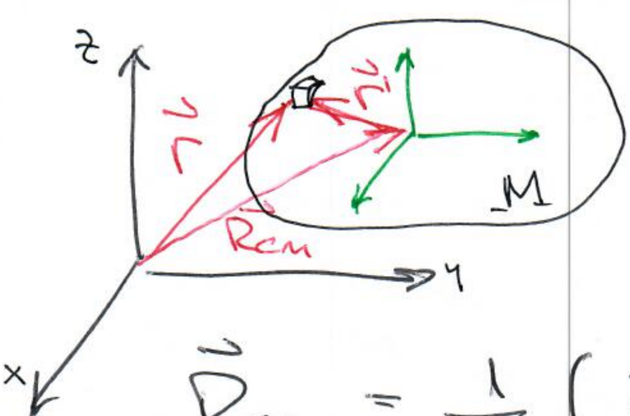
LAS FUERZAS INTERNAS ACTÚAN DE A PARES SEGÚN EL PRINCIPIO DE ACCIÓN Y REACCIÓN. LA SUMA ES NULA

★ SÓLIDO CON DENSIDAD D CONSTANTE

$$\int_V \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\, dm = D\int_V \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\, \underbrace{dV}_{dx\,dy\,dz} = \frac{d^2}{dt^2}\left[M\, \underbrace{\frac{D}{M}}_{\frac{1}{V}} \int_V \vec{r}\, dV\right]$$

$$\int_V \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\, dm = M\, \frac{d^2}{dt^2}\Big[\underbrace{\frac{1}{V}\int_V \vec{r}\, dV}_{R_{cm}}\Big]$$

$$\boxed{M\, \frac{d^2\vec{R}_{cm}}{dt^2} = \vec{F}^{ext}_{NETA}}$$



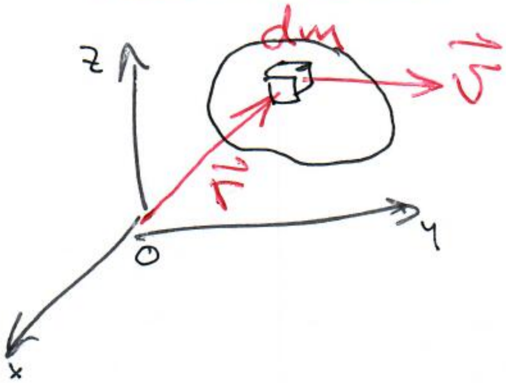
$$\vec{r} = \vec{R}_{cm} + \vec{r}\,'$$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\, dm = \frac{1}{M}\int_V (\vec{R}_{cm} + \vec{r}\,')\, dm$$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M}\int_V \vec{R}_{cm}\, dm + \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\,' dm$$

$$\cancel{\vec{R}_{cm}} = \cancel{\vec{R}_{cm}} \cdot \frac{M}{M} + \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\,' dm \Rightarrow \boxed{\int_V \vec{r}\,' dm = 0}$$

MOMENTUM ANGULAR



$$\vec{l} = \vec{r} \times dm\,\vec{v}$$

$$\vec{L}_o = \int_V \vec{r} \times dm\,\vec{v}$$

SI DENSIDAD D ES CONSTANTE

$$\vec{L}_o = D \int_V \vec{r} \times \vec{v}\, dV$$

PARA EL MOMENTUM ANGULAR $\vec{l}$ DEL ELEMENTO "dm" ES CIERTO QUE..

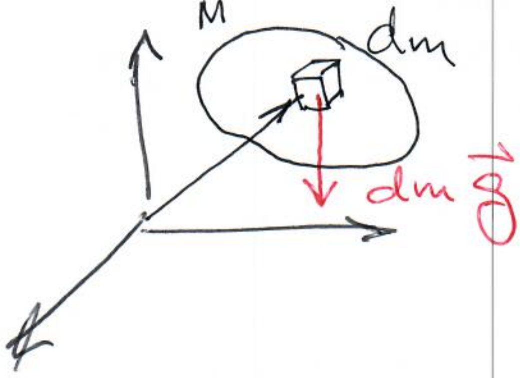
$$\left[\frac{d\vec{l}}{dt} = \underbrace{\vec{\tau}^{ext}}_{\text{SOBRE EL ELEMENTO } dm} + \underbrace{\vec{\tau}^{int}}_{\text{SOBRE EL ELEMENTO } dm} \right]$$

INTEGRANDO SOBRE TODO EL VOLUMEN ~~EO~~ DEL CUERPO

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{\tau}_o^{ext}}$$

(TORQUE DE TODAS LAS FUERZAS EXTERNAS SOBRE EL ORIGEN)

* LA INTEGRACIÓN (SUMA) DE LOS TORQUES DE LAS F. INTERNAS SE ANULA POR LA RAZÓN YA DESCRITA PARA UN S.P



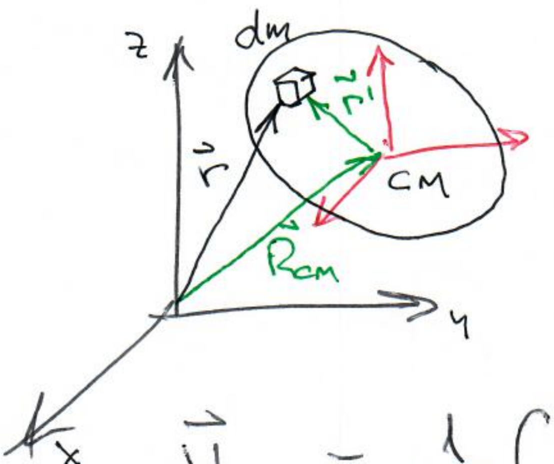
TORQUE DE LA
FUERZA GRAVITACIONAL

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times dm\vec{g}$$

$$\vec{\tau}_0^{\,\vec{g}} = \int_V \vec{r} \times dm\vec{g} = M \underbrace{\left[\frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm\right]}_{\vec{R}_{CM}} \times \vec{g}$$

$$\boxed{\vec{\tau}_0^{(\vec{g})} = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g}}$$

EQUIVALENTE AL TORQUE DE UNA PARTICULA M
COLOCADA EN $\vec{R}_{CM}$



EL ELEMENTO dm EN
LA POSICIÓN $\vec{r}$ SE MUEVE
CON VELOCIDAD $\vec{v}$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M}\int_V \vec{v}\, dm = \frac{1}{M}\int_V \left(\vec{V}_{CM} + \frac{d\vec{r}'}{dt}\right) dm$$

$$\vec{V}_{CM} = \vec{V}_{CM} + \frac{1}{M}\int_V \underbrace{\frac{d\vec{r}'}{dt}}_{\vec{v}'} dm \rightarrow \boxed{\int_V \vec{v}'\, dm = 0}$$

$$\vec{L}_o = \int_V \vec{r} \times \vec{v}\, dm$$

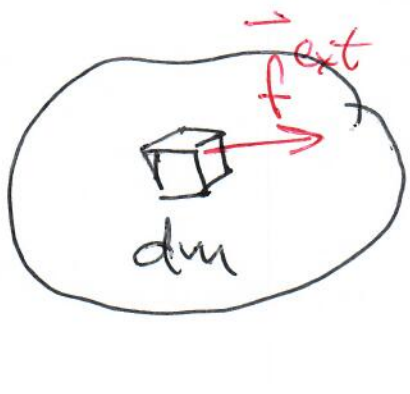
$$\vec{L}_o = \int_V (\vec{R}_{cm} + \vec{r}\,') \times (\vec{V}_{cm} + \vec{v}\,')\, dm$$

$$\vec{L}_o = \vec{R}_{cm} \times M\vec{V}_{cm} + \vec{R}_{cm} \times \underbrace{\int_V \vec{v}\,' dm}_{=0} + \underbrace{\left[\int_V \vec{r}\,' dm\right]}_{=0} \times \vec{V}_{cm} + \int_V \vec{r}\,' \times \vec{v}\,' dm$$

$$\boxed{\vec{L}_o = \vec{R}_{cm} \times M\vec{V}_{cm} + \vec{L}_{cm}}$$

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \frac{d\vec{L}_o}{dt} - \underbrace{\vec{V}_{cm} \times M\vec{V}_{cm}}_{=0} - \vec{R}_{cm} \times M\vec{a}_{cm}$$

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \frac{d\vec{L}_o}{dt} - \vec{R}_{cm} \times M\vec{a}_{cm}$$



Si $\vec{f}^{ext}$ ES LA FUERZA EXT. POR UNIDAD DE MASA

$\vec{f}^{ext} dm$ ES LA F. EXT. SOBRE dm

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\tau}_0^{\,ext} = \int_V \vec{r} \times \vec{f}^{\,ext}\, dm$$

$$M\vec{a}_{cm} = \vec{F}^{ext} = \int_V \vec{f}^{\,ext}\, dm$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} - \vec{R}_{cm} \times M\vec{a}_{cm} \equiv \int_V \vec{r} \times \vec{f}^{\,ext}\, dm - \vec{R}_{cm} \times \int_V \vec{f}^{\,ext}\, dm$$

$$= \int_V \vec{r} \times \vec{f}^{\,ext}\, dm - \int_V \vec{R}_{cm} \times \vec{f}^{\,ext}\, dm$$

$$= \int_V (\vec{r} - \vec{R}_{cm}) \times \vec{f}^{\,ext}\, dm$$

$$= \int \vec{r}\,' \times \vec{f}^{\,ext}\, dm$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{\tau}_{cm}^{\,ext}}$$