

RELACIONES Y FÓRMULAS APLICABLES AL ANÁLISIS
DEL MOVIMIENTO DE SIST. DE PARTÍCULAS Y SÓLIDOS

SIST. DE PARTÍCULAS

SÓLIDOS

★ CENTRO DE MASA

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M_T} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} dm$$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV$$

SI LA DENSIDAD ES CTE.

★ CENTRO DE MASA DE VARIAS FIGURAS DE PARTÍCULAS O DE VARIOS SÓLIDOS

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{\sum M_i} \sum M_i \vec{r}_{cm}^i$$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum M_i \vec{r}_{cm}^{(i)}}{\sum M_i}$$

M_i : MASA TOTAL DEL S.P. "i"

M_i : MASA TOTAL DEL SÓLIDO "i"

★ MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASA

$$M_T \vec{a}_{cm} = \vec{F}^{ext} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext}$$

$$M \vec{a}_{cm} = \vec{F}^{ext}$$

M_T : MASA TOTAL DEL S.P.

↓
SUMA DE TODAS LAS $\vec{F}_i$ EXTERNAS SOBRE EL SÓLIDO

★. FUERZA GRAVITACIONAL

(2)

$$\vec{F}_G = \sum m_i \vec{g}$$

$$F_G = \int_V \vec{g} dm$$

$$\vec{F}_G = M_T \vec{g}$$

$$F_g = M \vec{g}$$

★. MOMENTUM ANGULAR c/r AL ORIGEN DE LOS DE COORDENADAS

$$\vec{L}_O = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{L}_O = \int_V \vec{r} \times \vec{v} dm$$

★. MOMENTUM ANGULAR c/r AL CENTRO DE MASA

$$\vec{L}_{cm} = \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i$$

$$\vec{L}_{cm} = \int_V \vec{r}' \times \vec{v}' dm$$

$\vec{r}_i$: POSICIÓN DE LA PART.
"i" c/r AL C.M.

$\vec{v}_i$: VELOCIDAD DE LA PART.
"i" c/r AL C.M.

$\vec{r}'$: POSICIÓN DEL
ELEMENTO dm
c/r AL C.M.

$\vec{v}'$: VELOCIDAD DEL
ELEMENTO dm
c/r AL C.M.

★. RELACIÓN ENTRE $\vec{L}_O$ Y $\vec{L}_{cm}$

$$\vec{L}_O = \vec{R}_{cm} \times M_T \vec{v}_{cm} + \vec{L}_{cm}$$

$$\vec{L}_O = \vec{R}_{cm} \times M \vec{v}_{cm} + \vec{L}_{cm}$$

★. ENERGÍA CINÉTICA

$$K = \frac{1}{2} M_T v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2$$

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \int_V \vec{v}' \cdot \vec{v}' dm$$

★ ENERGÍA POTENCIAL

$$V_G = \sum m_i g z_i$$

$$V_G = M_T g z_{cm}$$

★ S.P. ^{RÍGIDO} que rota c/r a eje fijo $\hat{k}$

$$\vec{L}_0 = \left(\sum m_i r_i^2 \right) \dot{\theta} \hat{k}$$

I_0 : MOMENTO DE INERCIA C/R AL EJE $\hat{k}$

r_i : DISTANCIA DE LA PARTÍCULA "i" AL EJE $\hat{k}$

ENERGÍA CINÉTICA

$$K = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$$

$$K = \frac{1}{2} \left(\sum m_i r_i^2 \right) \dot{\theta}^2$$

$$K = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2$$

↑

$$V_G = \int_V g z dm$$

$$V_G = M g z_{cm}$$

SÓLIDO QUE ROTA C/R A EJE FIJO $\hat{k}$

$$\vec{L}_0 = \left[\int_V r^2 dm \right] \dot{\theta} \hat{k}$$

I_0 : MOMENTO DE INERCIA C/R AL EJE $\hat{k}$

r : DISTANCIA DEL ELEMENTO "dm" C/R AL EJE DE ROTACIÓN

$$K = \frac{1}{2} \int_V (r \dot{\theta})^2 dm$$

$$K = \frac{1}{2} \left[\int_V r^2 dm \right] \dot{\theta}^2$$

↑
 I_0

$$K = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2$$

* TEOREMA DE STEINER

4

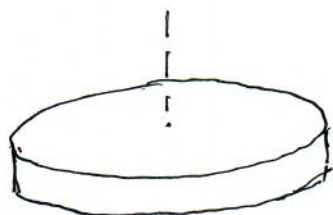
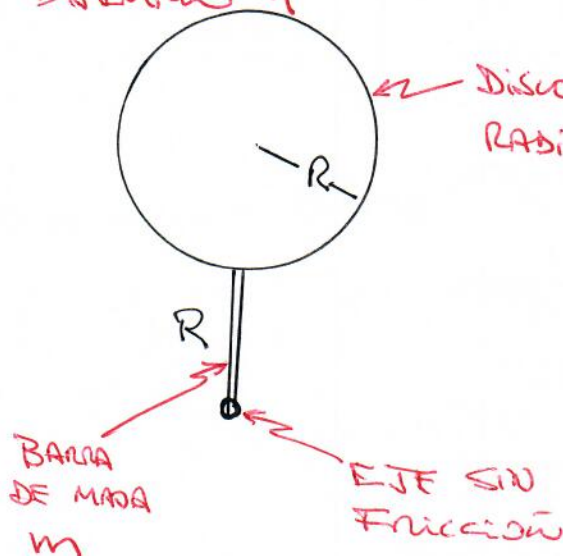
MOMENTO DE INERCIA RESPECTO DE UN EJE CUALQUIERA (I_0) Y MOMENTO DE INERCIA RESPECTO DE UN EJE PARALELO QUE PASA POR EL CENTRO DE MASA, (I_{cm})

SÍ

SÓLIDO

$$I_0 = M D^2 + I_{cm}$$

Ejemlo 1



CONSIDERE EL CASO EN QUE $M = 2m$

PREGUNTAS

- VELOCIDAD Y ACCELERACIÓN ANGULAR CUANDO $\theta = \pi/2$
- FUERZA EN EL EJE SI $\theta = \pi/2$

MOMENTO DE INERCIA DE UN DISCO DE RADIO R Y ESPESOR D, ALREDEDOR DE UN EJE PERPENDICULAR QUE PASA POR EL CENTRO.

$$\begin{aligned} I_0 &= \iiint \rho^2 dm = D \iiint \rho^2 dp p d\theta dz \\ &= D \left[\int_0^R \rho^3 d\rho \right] \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right] \left[\int_0^{2\pi} dz \right] \end{aligned}$$

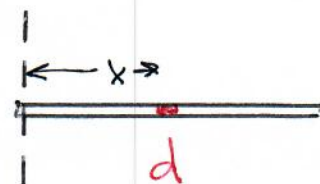
$$I_0 = \frac{M}{\cancel{\pi R^2} \cancel{D}} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} \cancel{2} R^{\cancel{4}^2} \cdot \cancel{2\pi} \cdot \cancel{D}$$

$$I_0 = \frac{MR^2}{2}$$

MOMENTO DE INERCIAS DE UNA BARRA DE
LARGO R C/R A UN EJE $\perp$ QUE PASA
POR UN EXTREMO

SEA " d_0 " LA DENSIDAD LINEAL (kg/m)

$$I_0 = \int_0^R x^2 \underbrace{d_0 dx}_{dm}$$



$$I_0 = d_0 \cdot \frac{1}{3} R^3$$

$$d_0 = \frac{m}{R}$$

$$I_0 = \frac{1}{3} m R^2$$

★ CENTRO DE MASA DEL DISCO ESTA A UNA
DISTANCIA $2R$ DEL EJE

★ CENTRO DE MASA DE LA BARRA ESTA
A UNA DISTANCIA $\frac{R}{2}$ DEL EJE,

C.M. DEL SÓLIDO COMPUESTO ($t=0$) ⑥

$$y_{cm} = \frac{1}{M+m} \left[m \frac{R}{2} + M 2R \right]$$

$$y_{cm} = \frac{(m + 4M)}{(m + M)} \frac{R}{2} = \frac{3}{2} R = y_{cm}$$

CONSIDERACIONES DE ENERGÍA

$$K + V_G = E_0 = (M+m)g y_{cm}$$
$$= 3mg \cdot \frac{3}{2} R$$

$$\frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 + 0 = \frac{9}{2} mgR$$

$\uparrow$
 $V_G \text{ EN } \theta = \frac{\pi}{2}$

$$I_0 = I_{0 \text{ disco}} + I_{0 \text{ barra}}$$

$$I_0 = \underbrace{\frac{MR^2}{2} + M(2R)^2}_{\text{STEINER}} + \frac{1}{3} m R^2 = \frac{28}{3} m R^2$$

$$\dot{\theta}^2 \Big|_{\theta = \frac{\pi}{2}} = \frac{9mgR}{I_0} = \frac{9mgR}{\frac{28}{3}mR^2} = \frac{27}{28} \frac{g}{R}$$

$$\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{27}{28} \frac{g}{R}}}$$

PARA UN ÁNGULO θ GENÉRICO DE CAÍDA (7)
SE CUMPLE QUE :

$$\frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 + (M+m)g \left(\frac{3}{2}R\right) \cos \theta = \underbrace{\frac{9}{2} m g R}_{F_0}$$

DERIVANDO ...

$$I_0 \cancel{\dot{\theta}} \ddot{\theta} - \frac{9 m g R}{2} \sin \theta \cancel{\dot{\theta}} = 0$$

$\downarrow$
 $\frac{28}{3} m R^2$

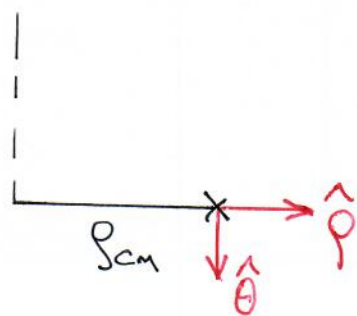
$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \frac{28}{3} R \ddot{\theta} = \frac{9g}{2}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{27}{56} \frac{g}{R}}$$

EC. DE MOVIMIENTO DEL C.M.

$$(M+m) \vec{a}_{cm} = \vec{F}_{EJE} + (M+m) \vec{g}$$

$$\vec{a}_{cm} = -\rho_{cm} \ddot{\theta}^2 \hat{\rho} + \rho_{cm} \ddot{\theta} \hat{\theta}$$



$$\vec{F}_{EJE} = F_{\rho} \hat{\rho} + F_{\theta} \hat{\theta}$$

$$(M+m) \vec{g} = (M+m) g \hat{\theta}$$

$$\hat{r}) \quad -(M+m) \rho_{cm} \dot{\theta}^2 = F_r$$

$$\hat{\theta}) \quad (M+m) \rho_{cm} \ddot{\theta} = F_\theta + (M+m)g$$

$$\therefore F_r = -3m \cdot \frac{3}{2} R \cdot \frac{27}{28} \frac{g}{R} = -4.34 \text{ mg}$$

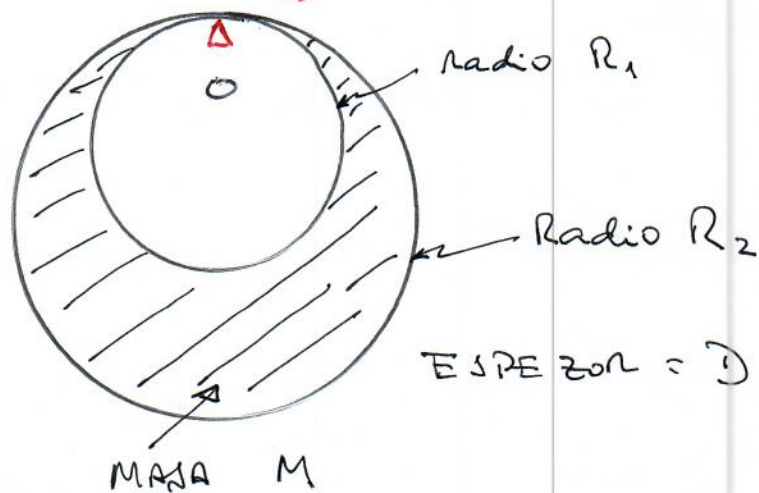
$$F_\theta = 3m \frac{3}{2} R \cdot \frac{27}{56} \frac{g}{R} - 3mg$$

$$F_\theta = 2.17 \text{ mg} - 3 \text{ mg}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_\theta &= -0.83 \text{ mg} \\ F_r &= -4.34 \text{ mg} \end{aligned}}$$

EJEMPLO 2

9

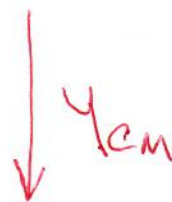
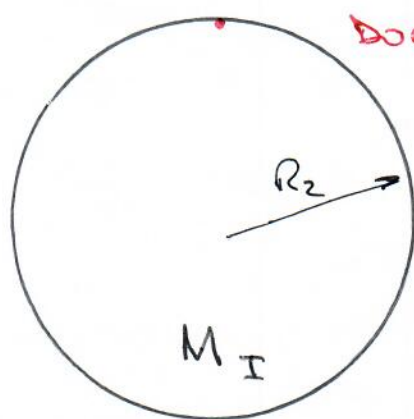


VOLUMEN DE LA
PIEZA

$$V = (\pi R_2^2 - \pi R_1^2) D$$

$$\text{DENSIDAD} = \frac{M}{\pi (R_2^2 - R_1^2) D}$$

★ MOMENTO DE INERCIA
DE LA PIEZA C/R AL PUNTO DE APOYO



$$I_1 = \frac{1}{2} M_I R_2^2 + M_I R_2^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2} M_{II} R_1^2 + M_{II} R_1^2$$

$$I_0 = I_1 - I_2$$

$$I_0 = \frac{3}{2} M_I R_2^2 - \frac{3}{2} M_{II} R_1^2$$

$$M_I = \frac{\pi R_2^2 \cdot D \cdot M}{\pi (R_2^2 - R_1^2) D} = M \frac{R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)}$$

$$M_{\underline{I}} = \frac{\pi R_1^2 \cancel{D} M}{\pi (R_2^2 - R_1^2) \cancel{D}} = \frac{R_1^2}{(R_2^2 - R_1^2)} M \quad (10)$$

$$I_0 = \frac{3}{2} \frac{R_2^4 - R_1^4}{(R_2^2 - R_1^2)} M$$

★ CENRO DE MASSA

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} dm$$

$$= \frac{1}{M} \left[\underbrace{\frac{M_{\underline{I}}}{M_{\underline{I}}} \int_V \vec{r} dm}_{\text{DOMINIO I}} - \frac{M_{\underline{II}}}{M_{\underline{II}}} \int_V \vec{r} dm \right]_{\text{DOMINIO II}}$$

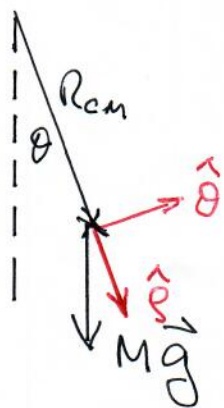
$$R_{CM} = \frac{1}{M} [M_{\underline{I}} R_{CM \underline{I}} - M_{\underline{II}} R_{CM \underline{II}}]$$

$$t=0 \quad R_{CM \underline{I}} = R_2 \hat{j} \quad R_{CM \underline{II}} = R_1 \hat{j}$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} [M_{\underline{I}} R_2 - M_{\underline{II}} R_1] \hat{j}$$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \left[\cancel{M} \frac{R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)} R_2 - \frac{\cancel{M} R_1^2}{(R_2^2 - R_1^2)} R_1 \right]$$

$$|\vec{R}_{cm}| = \frac{R_2^3 - R_1^3}{(R_2^2 - R_1^2)}$$



$$I_o \ddot{\theta} = \vec{\tau}_{ext} \cdot \hat{k} \\ = (\vec{R}_{cm} \times M \vec{g}) \cdot \hat{k}$$

$$I_o \ddot{\theta} = R_{cm} \hat{p} \times (Mg \cos \theta \hat{p} - Mg \sin \theta \hat{\theta})$$

$$I_o \ddot{\theta} = -R_{cm} Mg \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{R_{cm} Mg}{I_o} \sin \theta = 0$$

PED. OSCILLATIONS

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{R_{cm} Mg}{I_o}$$