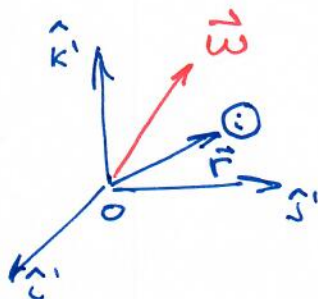


CONCEPTO DE MATRIZ DE INERCIA.

SIST. DE PARTÍCULAS RÍGIDO O UN SÓLIDO
QUE SE MUEVEN MANTENIENDO UNO O MÁS
PUNTO FIJO



$(\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$ ES UN SISTEMA DE REFERENCIA
SOLIDARIO CON EL S.P. O CON
EL SÓLIDO

"O" ES UN PUNTO FIJO (NO SE
MUEVE EN EL ESPACIO)

LA ESTRUCTURA (S.P. O SÓLIDO) ESTÁ ROTANDO
CON VELOCIDAD ANGULAR $\vec{\omega}$

EL SISTEMA $(\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$ ES UN SIST. DE REF. NO
INERCIAL.

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{v}_i' + \vec{\omega} \times \vec{r}_i'$$

EN ESTE CASO:

$$\vec{v}_0 = 0$$

$$\vec{v}_i' = 0$$

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i'$$

S.P.

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i')$$

SÓLIDO

$$\vec{L}_0 = \int_M \vec{r} \times \vec{v} dm = \int_M \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}) = a^2 \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a}$$

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^n m_i \left[r_i^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i \right]$$

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

$$\vec{r}_i \cdot \vec{\omega} = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z$$

$$\vec{L}_0 = L_x \hat{i} + L_y \hat{j} + L_z \hat{k}$$

★ TODOS LOS VECTORES
REFERIDOS AL
SIST. DE REF.
 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

$$L_x = \sum_{i=1}^n m_i \left[(\cancel{x_i^2} + y_i^2 + z_i^2) \omega_x - (\cancel{x_i} \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) x_i \right]$$

$$L_x = \left[\sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) \right] \omega_x - \left[\sum_{i=1}^n m_i x_i y_i \right] \omega_y - \left[\sum_{i=1}^n m_i x_i z_i \right] \omega_z$$

SE PUEDE DEDUCIR QUE...

$$L_y = - \left[\sum_{i=1}^n m_i x_i y_i \right] \omega_x + \left[\sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2) \right] \omega_y - \left[\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \right] \omega_z$$

$$L_z = - \left[\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \right] \omega_x - \left[\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \right] \omega_y + \left[\sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) \right] \omega_z$$

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

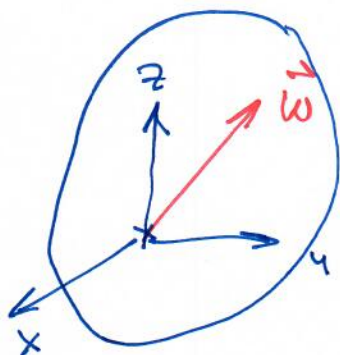
↑

MATRIZ DE INERCIA

$$I = \begin{bmatrix} \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i x_i y_i & \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i x_i z_i & -\sum m_i y_i z_i & \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}$$

En el caso de un sólido

(2')



$$I = \begin{bmatrix} \int_M (y^2 + z^2) dm & - \int_M xy dm & - \int_M xz dm \\ - \int_M xy dm & \int_M (x^2 + z^2) dm & - \int_M yz dm \\ - \int_M xz dm & - \int_M yz dm & \int_M (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}$$

Matriz de INERCIA

Ejes Principales de Inercia

3

EN EL CASO EN QUE EL SISTEMA DE REFERENCIA FIJO A UN SISTEMA DE PARTICULAS RÍGIDO O A UN SÓLIDO EN QUE SE CUMPLE QUE LA MATRIZ DE INERCIA ES DIAGONAL

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$

LOS EJES DE ESE SISTEMA DE REFERENCIA SE DENOMINAN Ejes Principales de Inercia

TIENEN LA PARTICULARIDAD QUE SI EL S.P. O EL CUERPO ROTA ALREDEDOR DE UNO DE ESOS EJES, EL MOMENTUM ANGULAR ESTÁ ALINEADO CON LA VELOCIDAD ANGULAR

RECORDANDO QUE $[L] = [I][\omega]$

SI $\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} \rightarrow L_x = I_{11} \omega_x$

$$L_y = 0$$

$$L_z = 0$$

$$\therefore \vec{L} = I_{11} \vec{\omega}$$

ANALÓGAMENTE

SI $\vec{\omega} = \omega_y \hat{j} \rightarrow \vec{L} = I_{22} \vec{\omega}$

SI $\vec{\omega} = \omega_z \hat{k} \rightarrow \vec{L} = I_{33} \vec{\omega}$

CLARAMENTE ES NO OCURRE EN EL CASO GENERAL

Es. Si $\vec{\omega} = \omega_x \hat{i}$

$$L_x = I_{xx} \omega_x$$

$$L_y = I_{21} \omega_x$$

$$L_z = I_{31} \omega_x$$

$$\vec{L} = I_{xx} \omega_x \hat{i} + I_{21} \omega_x \hat{j} + I_{31} \omega_x \hat{k}$$

* \vec{L} y $\vec{\omega}$ NO ESTÁN ALINEADOS!

¿CÓMO ENCONTRAR LOS Ejes PRINCIPALES DE INERCIA?

EL MOMENTO DE INERCIA ASOCIADO A

Si I es un eje principal de inercia

Entonces

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

EJE COINCIDE CON LA DIRECCIÓN DE $\vec{\omega}$

$$L_x = I \omega_x = I_{11} \omega_x + I_{12} \omega_y + I_{13} \omega_z$$

$$L_y = I \omega_y = I_{21} \omega_x + I_{22} \omega_y + I_{23} \omega_z$$

$$L_z = I \omega_z = I_{31} \omega_x + I_{32} \omega_y + I_{33} \omega_z$$

$$[M] \rightarrow \begin{bmatrix} (I_{11} - I) & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & (I_{22} - I) & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & (I_{33} - I) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = 0 \quad (*)$$