

UNA SOLUCIÓN NO TRIVIAL SE OBTIENE HACIENDO

$$|M| = 0 \quad \text{DETERMINANTE DE } M = 0$$

LA ECUACIÓN $|M| = 0$

EN ω TIENE 3 SOLUCIONES (ES UNA ECUACIÓN CÚBICA): I_1, I_2, I_3

I_1, I_2, I_3 SON LOS MOMENTOS DE INERCIA PRINCIPALES

PARA ENCONTRAR LA DIRECCIÓN DE UN EJE PRINCIPAL DE INERCIA, POR EJEMPLO EL ASOCIADO AL MOMENTO DE INERCIA I_1 , SE REEMPLAZA I_1 EN LA EC. (*)

$$(I_{11} - I_1)\omega_x + I_{12}\omega_y + I_{13}\omega_z = 0$$

$$I_{21}\omega_x + (I_{22} - I_1)\omega_y + I_{23}\omega_z = 0$$

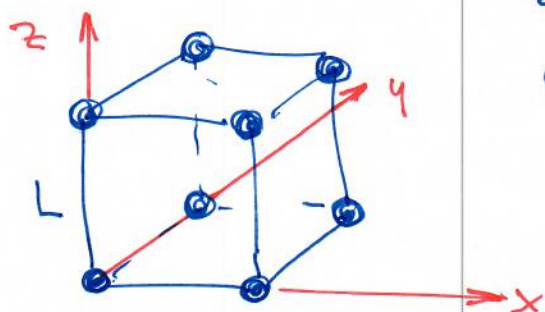
$$I_{31}\omega_x + I_{32}\omega_y + (I_{33} - I_1)\omega_z = 0$$

ESO PERMITE ENCONTRAR LA RELACIÓN QUE DEBE HABER ENTRE ω_x, ω_y y ω_z

DE LO CUAL SE PUEDE DETERMINAR

LA DIRECCIÓN (EN EL SIST. DE REFERENCIA LIGADO AL S.D. O AL CUERPO) DEL EJE PRINCIPAL

★ EJEMPLO



SIST. DE PART. CON FORMA ⑥
DE CUBO DE LADO $L = 1$
CON PARTÍCULAS DE MASA
 m EN CADA VÉRTICE

POSICIONES DE LAS PART.

x_i, y_i, z_i	x_i, y_i, z_i
$(0, 0, 0)$	$(0, 0, 1)$
$(0, 1, 0)$	$(0, 1, 1)$
$(1, 0, 0)$	$(1, 0, 1)$
$(1, 1, 0)$	$(1, 1, 1)$

MATRIZ DE INERCIA

$$\begin{bmatrix} \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i x_i y_i & \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i x_i z_i & -\sum m_i y_i z_i & \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8m & -2m & -2m \\ -2m & 8m & -2m \\ -2m & -2m & 8m \end{bmatrix}$$

DETERMINANTE PARA CALCULAR LOS MOMENTOS
DE INERCIA (I) PRINCIPALES

$$\begin{vmatrix} (8m - I) & -2m & -2m \\ -2m & (8m - I) & -2m \\ -2m & -2m & (8m - I) \end{vmatrix} = 0$$

SOLUCIONES

7

$$I_1 = 4m$$

$$I_2 = I_3 = 10m$$

DIRECCIÓN DEL EJE PRINCIPAL QUE TIENE ASOCIADO UN MOMENTO DE INERCIYA I_1
 Si EL S.P. ROTA ALREDEDOR DE ESTE EJE

$$\vec{L} = I_1 \vec{\omega}$$

SE CUMPLE ENTONCES QUE :

$$(I_{11} - I_1) \omega_x + I_{12} \omega_y + I_{13} \omega_z = 0$$

$$I_{21} \omega_x + (I_{22} - I_1) \omega_y + I_{23} \omega_z = 0$$

$$I_{31} \omega_x + I_{32} \omega_y + (I_{33} - I_1) \omega_z = 0$$

$$4m \omega_x - 2m \omega_y - 2m \omega_z = 0$$

$$-2m \omega_x + 4m \omega_y - 2m \omega_z = 0$$

$$-2m \omega_x - 2m \omega_y + 4m \omega_z = 0$$

$$(1) \quad 2\omega_x - \omega_y - \omega_z = 0$$

$$(2) \quad -\omega_x + 2\omega_y - \omega_z = 0$$

$$(3) \quad -\omega_x - \omega_y + 2\omega_z = 0$$

$$(1) - (2) \quad 3\omega_x - 3\omega_y = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega_x = \omega_y}$$

$$(3) \quad -2\omega_y + 2\omega_z = 0$$

$$\boxed{\omega_z = \omega_y}$$

$$\therefore \boxed{\omega_x = \omega_y = \omega_z}$$

∴ EL EJE DE ROTACIÓN DEFINIDO POR EL VECTOR $\vec{\omega}$ ES DEL TIPO

$$\vec{\omega} = \omega_0 \hat{i} + \omega_0 \hat{j} + \omega_0 \hat{k}$$

APUNTA EN LA DIAGONAL DEL CUBO.