# Auxiliar 1

## P1

Tenemos la aceleración $\vec{a} = k\sqrt{x}\,\hat{\imath}$, por lo que en su forma escalar es:

trucazo mecánica!

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = k\sqrt{x} \Big/ \int dx \Rightarrow \int \dot{x}\,d\dot{x} = k\int \sqrt{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{2k}{3}x^{3/2} + c$$

Tenemos las condiciones iniciales en $t=0$, $\dot{x}(t=0) = x(t=0) = 0$, o sea

$$0 = 0 + c \Leftrightarrow c = 0$$

seguimos

$$\Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{2}{3}k\,x^{3/2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}k x^{3/2}} \Big/ \int dt$$

$$\pm\left(\frac{4}{3}k\right)^{-1/2}\int x^{-3/4}\,dx = dt$$

$$\pm 4\cdot\left(\frac{3}{4k}\right)^{1/2} x^{1/4} = t + c$$

CI $\rightarrow$ $x(t=0)=0 \Rightarrow c=0$

$$\Rightarrow \pm 2\left(\frac{3}{k}\right)^{1/2} x^{1/4} = t$$

$$\Rightarrow x(t) = \left(\pm\frac{t}{2}\left(\frac{k}{3}\right)^{1/2}\right)^4$$

$$= \frac{t^4}{16}\,\frac{k^2}{9}$$

Así que para la velocidad $\Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{t^3}{4}\,\frac{k^2}{9}$, y la aceleración $\Rightarrow \ddot{x}(t) = \frac{t^2}{4}\,\frac{k^2}{3}$

# P2

Tenemos un problema similar al anterior

$$\vec{a} = -k v^2 \hat{\imath} \Rightarrow \ddot{x} = -k\dot{x}^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\dot{x}}{dt} = -k\dot{x}^2 \Big/ \int dt$$

$$\int \frac{d\dot{x}}{\dot{x}^2} = -k\int dt$$

$$-\frac{1}{\dot{x}} = -kt + C_1$$

Nuestras C.I. son $\dot{x}(t=0) = v_0 \Rightarrow -\frac{1}{v_0} = C_1 \Rightarrow \frac{1}{\dot{x}} = kt + \frac{1}{v_0} \Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{1}{kt + 1/v_0}$ $\Big/ \int dt$

$$\Rightarrow \int dx = \int \frac{1}{kt + 1/v_0}\, dt$$

$$x = \frac{\ln(kt + 1/v_0)}{k} + C_2$$

Usamos la condición $x(t=0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\ln(1/v_0)}{k} + C_2 \Leftrightarrow C_2 = -\frac{\ln(1/v_0)}{k}$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{\ln(kt + 1/v_0)}{k} - \frac{\ln(1/v_0)}{k} = \frac{1}{k}\ln(v_0 k t + 1)$$

Siempre podemos comprobar que soluciona

$$\triangleright\ \ddot{x}(t) = \frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{k}{(kt + 1/v_0)^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{k}{(kt + 1/v_0)^2} = -k\left(\frac{1}{kt + 1/v_0}\right)^2$$

✓ Soluciona!

Para encontrar la velocidad en función de la posición se puede trucazo de mecánica.
Empecemos de la ec. dada

$$\ddot{x} = -k\dot{x}^2 \Leftrightarrow \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -k\dot{x}^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\dot{x}}\, d\dot{x} = -k\,dx \Big/ \int$$

$$\Rightarrow \int \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -k\int dx$$

$$\ln(\dot{x}) = -kx + C_3$$

Nuestras C.I.'s son que en $t=0$, $\dot{x}(t=0) = v_0 \wedge x(t_0) = 0$

$$\Rightarrow \ln(v_0) = C_3 \Rightarrow \ln(\dot{x}) = -kx + \ln(v_0) \Rightarrow \dot{x}(x) = \exp(-kx + \ln(v_0))$$

# P3

Nos hablan de rapidez (módulo de la velocidad)

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (1)$$

y tenemos la relación entre las posiciones en los dos ejes $y = cx^2$, derivamos esta

$$\Rightarrow \dot{y} = 2cx\dot{x}$$ , reemplazamos $x$ con

$$\Rightarrow \dot{y} = 2c\left(\pm\sqrt{\frac{y}{c}}\right)\dot{x}$$

$$\Leftrightarrow \dot{x} = \frac{\dot{y}}{2c}\left(\pm\sqrt{\frac{c}{y}}\right)$$ , reemplazamos en (1)

$$\Rightarrow v_0^2 = \frac{\dot{y}^2}{4c^2}\,\frac{c}{y} + \dot{y}^2$$

$$\Rightarrow \dot{y}^2\left(\frac{1}{4cy} + 1\right) = v_0^2$$

$$\Rightarrow \dot{y}(y) = \pm v_0\sqrt{\frac{4cy}{1+4cy}} = \pm v_0\sqrt{\frac{4c^2x^2}{1+4c^2x^2}} = \dot{y}(x)$$

Reemplazamos en (1) $\Rightarrow v_0^2 = \dot{x}^2 + v_0^2\left(\frac{4c^2x^2}{1+4c^2x^2}\right) \Leftrightarrow \dot{x}(x) = \pm v_0\sqrt{1 - \frac{4c^2x^2}{1+4c^2x^2}}$

$$\Rightarrow \vec{v}(x = x_0, y = y_0) = \left(\pm v_0\sqrt{1 - \frac{4c^2x^2}{1+4c^2x^2}},\ \pm v_0\sqrt{\frac{4c^2x_0^2}{1+4c^2x_0^2}}\right)$$