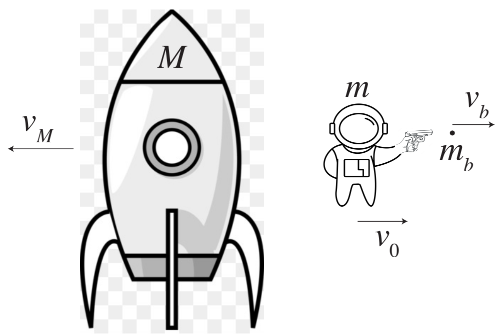
FI1000 - Introducción a la Física Clásica
Semestre de Otoño 2022
25 de junio 2022
Duración: 3 horas

Control 3

P1. Considere una nave espacial de masa M y un astronauta de masa m (incluyendo su traje y equipo), inicialmente en reposo con el astronauta dentro de la nave. En un cierto instante el astronauta debe salir de la nave y se impulsa hacia la derecha con rapidez v_0.



a) (2 pts.) Calcule la rapidez con la que la nave espacial se mueve luego que el astronauta la abandona.

Inicialmente, el momentum total es cero. Después de que el astronauta sale con rapidez v_0, el momentum total es

$$p_1 = mv_0 - Mv_M, \tag{1}$$

donde v_M es la rapidez de la nave, y el signo indica que la nave viaja hacia la izquierda. Imponiendo conservación de momentum, se obtiene

$$\boxed{v_M = \frac{m}{M}v_0.} \tag{2}$$

b) (4 pts.) Luego que el astronauta se ha movido una cierta distancia de la nave, decide volver. Si el astronauta tiene una pistola con una única bala de masa m_b que puede disparar con rapidez v_b con respecto al astronatuta, calcule la masa m_b de tal forma que el astronauta pueda volver a su nave. Comente respecto de los casos límite en que $v_b \gg v_0$ y $v_b = v_0$.

Después de disparar la bala, el momentum total del sistema será

$$p_2 = m_b(v_b + v_0) - Mv_M - (m - m_b)v_2, \tag{3}$$

donde el primer término corresponde al momentum de la bala, con rapidez v_b con respecto al astronauta (rapidez $v_b + v_0$ con respecto al sistema fijo), el segundo término es el momentum de la nave, y el último término es el del astronauta, que perdió la masa de la bala, y se mueve con rapidez v_2 hacia la izquierda, por determinar. De la parte anterior ya sabemos que $Mv_M = mv_0$. Imponiendo conservación de momentum, $p_2 = 0$, y despejando v_2, se obtiene

$$v_2 = \frac{m_b(v_b + v_0) - mv_0}{m - m_b}. \tag{4}$$

Para que el astronauta pueda volver a la nave, es necesario que $v_2 > v_M$. Entonces,

$$\frac{m_b(v_b + v_0) - mv_0}{m - m_b} > v_M = \frac{m}{M} v_0. \tag{5}$$

Reordenando esta expresión, se obtiene que

$$\boxed{m_b > m \frac{v_0(1 + m/M)}{v_b + v_0(1 + m/M)}.} \tag{6}$$

En el caso límite que $v_b \gg v_0$,

$$m_b > m \frac{v_0}{v_b} \left(1 + \frac{m}{M}\right), \tag{7}$$

y como $v_0/v_b \ll 1$, esta cota es muy pequeña. Es decir, incluso una bala muy poco masiva permite que el astronauta vuelva a la nave.

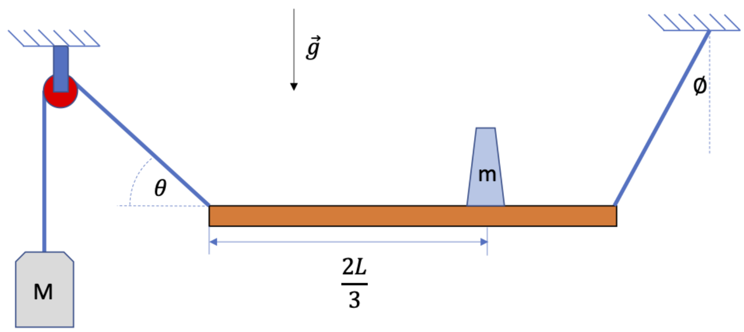
En el caso $v_b = v_0$, obtenemos

$$m_b > m \frac{1 + m/M}{2 + m/M}. \tag{8}$$

P2. Considere una barra de largo L y masa despreciable, que está sometida a la acción de dos cuerdas ideales atadas a cada uno de sus extremos y un bloque de masa m ubicado a una distancia $2L/3$ de uno de sus extremos, tal como se muestra en la figura. Una de las cuerdas está atada al techo, formando un ángulo ϕ con la vertical, y la otra pasa a través de una polea ideal y está atada a un bloque de masa M que está colgando. Considere que L, m, g y ϕ son datos del problema.

Nota: Le pueden ser útiles las relaciones

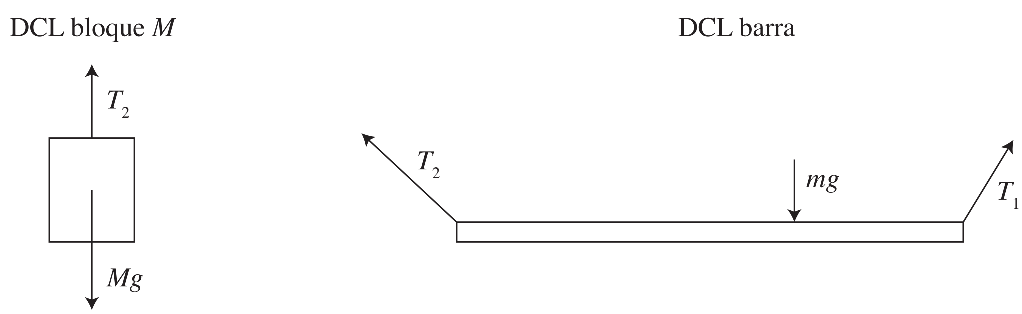
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}, \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}.$$



Si la barra está en equilibrio estático, determine:

a) (3 pts.) El ángulo θ (mostrado en la figura) que forma una de las cuerdas con la horizontal.

En la figura se muestran los diagramas de cuerpo libre para el bloque M y para la barra.



Para que la barra esté en equilibrio, se debe cumplir

$$\sum F_x = T_1 \operatorname{sen}\phi - T_2\cos\theta = 0, \tag{9}$$

$$\sum F_y = T_1\cos\phi + T_2\operatorname{sen}\theta - mg = 0, \tag{10}$$

$$\sum \tau_O = -\frac{2L}{3}mg + LT_1\cos\phi = 0. \tag{11}$$

El torque se determinó con respecto al extremo izquierdo de la barra.

De la ecuación (11) podemos despejar

$$T_1 \cos\phi = \frac{2}{3}mg, \tag{12}$$

y reemplazando este valor en la ecuación (10), se obtiene

$$T_2 \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}mg. \tag{13}$$

Por otro lado, de la ecuación (9), tenemos

$$T_2 \cos\theta = T_1 \operatorname{sen}\phi = \frac{2}{3}mg\tan\phi. \tag{14}$$

Entonces, dividiendo las ecuaciones (13) y (14), obtenemos

$$\boxed{\tan\theta = \frac{1}{2\tan\phi}.} \tag{15}$$

b) (3 pts.) El valor de la masa M.

A partir del diagrama de cuerpo libre para M, tenemos

$$T_2 = Mg \Rightarrow M = T_2/g. \tag{16}$$

De la ecuación (13), tenemos

$$M = \frac{m}{3\operatorname{sen}\theta}, \tag{17}$$

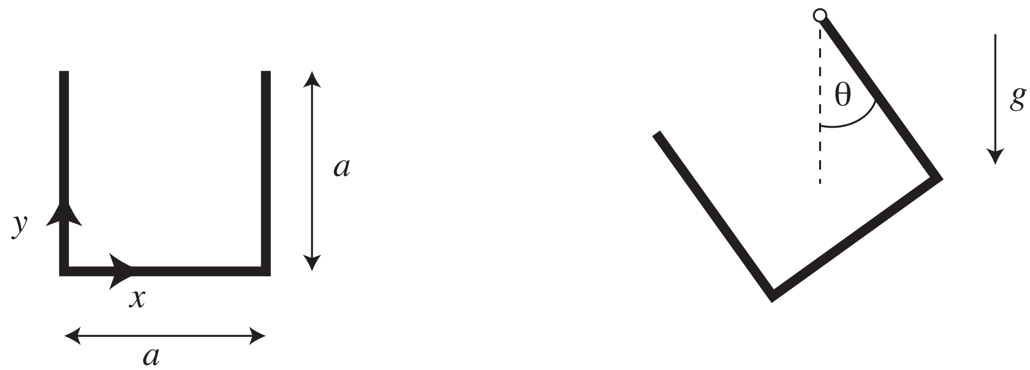
A partir del resultado anterior, podemos escribir junto con la expresión entregada en la nota,

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta} = 2\tan\phi\sqrt{1+\frac{1}{4\tan^2\phi}} = \sqrt{1+4\tan^2\phi}, \tag{18}$$

y por lo tanto

$$\boxed{M = \frac{1}{3}m\sqrt{1+4\tan^2\phi}.} \tag{19}$$

P3. Considere el objeto de la figura (a), formado por tres barras delgadas idénticas de longitud a y masa m cada una, soldadas entre sí en ángulos rectos.



(a) (b)

a) (3 pts.) Determine la posición del centro de masa del objeto, en el sistema de coordenadas cartesianas (x, y) mostrado en la figura (a).

Procedemos de manera separada por coordenadas, considerando que cada barra tiene su centro de masa en su punto central. Para la coordenada x_{CM},

$$x_{CM} = \frac{m0 + ma/2 + ma}{3m} = \frac{3ma/2}{3m} = \frac{a}{2}. \tag{20}$$

Para la coordenada y_{CM}, se tiene

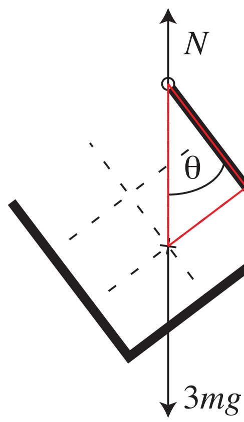
$$x_{CM} = \frac{ma/2 + m0 + ma/2}{3m} = \frac{ma}{3m} = \frac{a}{3}. \tag{21}$$

En resumen, las coordenadas (x_{CM}, y_{CM}) del centro de masa son

$$\boxed{x_{CM} = \frac{a}{2}}, \quad \boxed{y_{CM} = \frac{a}{3}.} \tag{22}$$

b) (3 pts.) El objeto se cuelga de un clavo sin roce que pasa por uno de sus extremos, como se muestra en la figura (b). Si el objeto se encuentra en equilibrio, determine el ángulo θ.

Del diagrama de cuerpo libre, notamos que la única manera de que el torque del peso con respecto al clavo sea nulo es que el centro de masa se ubique exactamente abajo del clavo.



Para determinar θ, consideramos el triángulo rectángulo marcado en rojo, de catetos $2a/3$ y $a/2$. Así,

$$\tan\theta = \frac{a/2}{2a/3} = \frac{3}{4}, \tag{23}$$

por lo tanto

$$\boxed{\theta = \arctan\frac{3}{4}.} \tag{24}$$