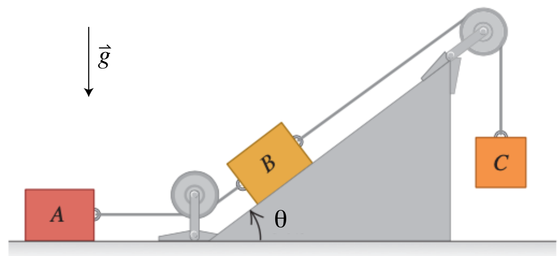
FI1000 - Introducción a la Física Clásica
Semestre de Otoño 2022
14 de mayo 2022
Duración: 3:15 horas

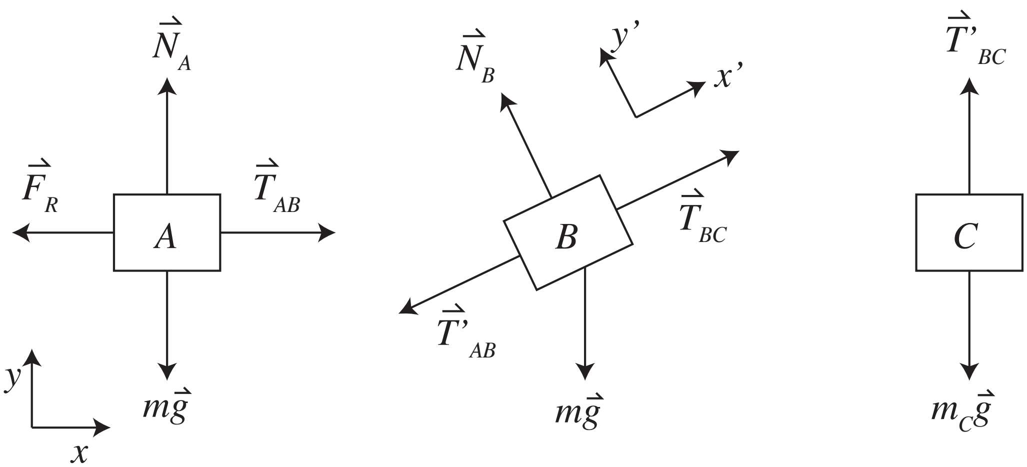
Control 2

P1. Los bloques A, B y C se colocan como se muestra en la figura y se conectan entre sí mediante cuerdas ideales de masa despreciable. Tanto A como B tienen masa m, y el bloque C tiene masa m_C. Entre el suelo y el bloque A hay un coeficiente de fricción estático μ_e, mientras que no hay roce entre el plano inclinado y el bloque B.



Si el sistema se encuentra en equilibrio:

a) (1 pt.) Dibuje las fuerzas que actúan sobre cada bloque.



En los diagramas, $|\vec{T}_{AB}| = |\vec{T}'_{AB}| = T_{AB}$ y $|\vec{T}_{BC}| = |\vec{T}'_{BC}| = T_{BC}$, pues son cuerdas ideales.

b) (3 pts.) Escriba la segunda ley de Newton para cada bloque y encuentre las tensiones en las cuerdas en función de m, m_C, g y θ.

Para el bloque A, usando el sistema de coordenadas (x, y) de la figura, tenemos

$$\sum F_x = T_{AB} - F_R = 0, \tag{1}$$

$$\sum F_y = N_A - mg = 0. \tag{2}$$

Para el bloque B, usando el sistema de coordenadas (x', y') de la figura, tenemos

$$\sum F_{x'} = T_{BC} - T_{AB} - mg \operatorname{sen} \theta = 0, \tag{3}$$

$$\sum F_{y'} = N_B - mg \cos \theta = 0. \tag{4}$$

Finalmente, para el bloque C, usando el sistema de coordenadas (x, y) de la figura, tenemos

$$\sum F_y = T_{BC} - m_C g = 0. \tag{5}$$

Usando la ecuación (5) se puede despejar directamente la tensión T_{BC},

$$\boxed{T_{BC} = m_C g.} \tag{6}$$

Usando este resultado en la ecuación (3), se puede despejar T_{AB},

$$\boxed{T_{AB} = (m_C - m \operatorname{sen} \theta) g.} \tag{7}$$

c) (1 pt.) Encuentre la relación que se debe cumplir entre m, m_C y θ para que el sistema esté en equilibrio.

Notemos que, para que $T_{AB} > 0$, se requiere

$$\boxed{m_C > m \operatorname{sen} \theta.} \tag{8}$$

Podemos entender esta condición al ver que si el bloque C es muy liviano, entonces el bloque B caería por el plano inclinado, pues este no tiene roce.

d) (1 pt.) Si el sistema está a punto de moverse, ¿Cuánto pesa el bloque C?

Si el sistema está a punto de moverse, entonces se cumple para la fuerza de roce estático,

$$F_R = \mu N_A. \tag{9}$$

Encontramos el valor de N_A usando la ecuación (2),

$$N_A = mg. \tag{10}$$

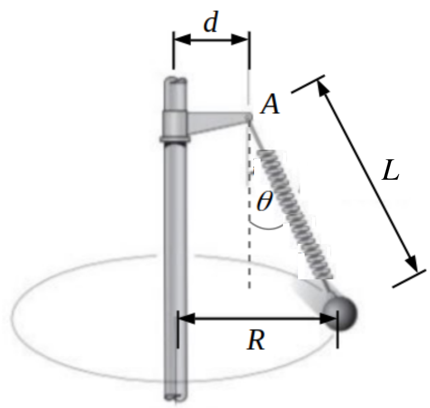
Utilizando las expresiones (7), (9) y (10) en la ecuación (1), encontramos

$$(m_C - m \operatorname{sen} \theta) g - \mu m g = 0, \tag{11}$$

de donde podemos despejar m_C,

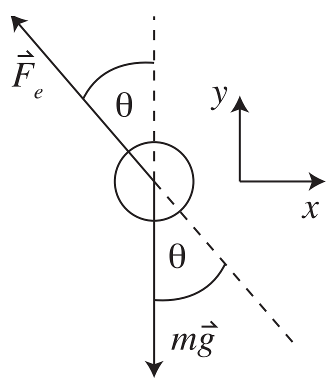
$$\boxed{m_C = (\mu + \operatorname{sen} \theta) m.} \tag{12}$$

P2. Un resorte de constante elástica $k = 25\,\mathrm{N/m}$, de largo natural $L_0 = 10\,\mathrm{cm}$, tiene uno de sus extremos unido a una bola de masa $m = 0.5\,\mathrm{kg}$. Su otro extremo A está sujeto a un brazo horizontal de longitud $d = 10\,\mathrm{cm}$ que rota de tal forma que la bola se encuentra en un movimiento circular uniforme de radio constante cuando el largo del resorte es $L = 50\,\mathrm{cm}$. Considere $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.



a) (2.5 pts.) Determine el ángulo θ que forma el resorte con la vertical.

En la siguiente figura se muestra el diagrama de cuerpo libre y el sistema de referencia utilizado.



Usamos la segunda ley de Newton, notando que m realiza un movimiento circular uniforme y por lo tanto su aceleración, en términos de su velocidad v y del radio del movimiento, es

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{d + L\,\mathrm{sen}\,\theta}\hat{x}. \tag{13}$$

Se obtienen las ecuaciones

$$\sum F_x = -F_e\,\mathrm{sen}\,\theta = -\frac{mv^2}{d + L\,\mathrm{sen}\,\theta}, \tag{14}$$

$$\sum F_y = F_e\cos\theta - mg = 0, \tag{15}$$

donde la fuerza elástica vale

$$F_e = k(L - L_0). \tag{16}$$

De la ecuación (15) podemos despejar θ,

$$\boxed{\cos\theta = \frac{mg}{k(L - L_0)}.} \tag{17}$$

b) (2.5 pts.) Determine la rapidez v de la bola.

Usando ahora la ecuación (14), podemos despejar v,

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{k(L - L_0)\operatorname{sen}\theta(d + L\operatorname{sen}\theta)}{m}}.} \tag{18}$$

c) (1 pt.) Evalúe sus resultados anteriores para obtener resultados numéricos para θ y v.

Usando los valores entregados, se tiene para θ,

$$\cos\theta = \frac{0.5\,\mathrm{kg}\ 10\,\mathrm{m/s^2}}{25\,\mathrm{N/m}\ (0.5\,\mathrm{m} - 0.1\,\mathrm{m})} = \frac{50}{25\ 4} = \frac{1}{2}. \tag{19}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\theta = 60^\circ = \frac{2\pi}{3}\ \mathrm{rad}.} \tag{20}$$

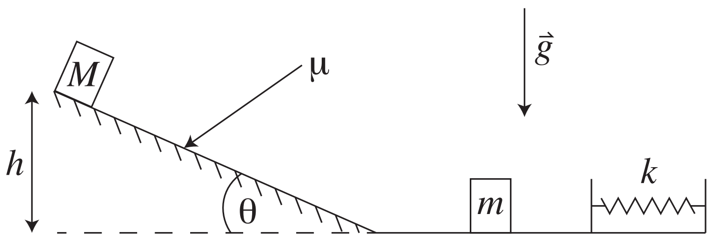
Reemplazando ahora en v,

$$v = \sqrt{\frac{25\,\mathrm{N/m}\ (0.5\,\mathrm{m} - 0.1\,\mathrm{m})\sqrt{3}/2\ (0.1\,\mathrm{m} + 0.5\,\mathrm{m}\sqrt{3}/2)}{0.5\,\mathrm{kg}}}, \tag{21}$$

$$= \sqrt{\frac{25\ 0.4\sqrt{3}(0.2 + 0.5\sqrt{3})}{2\ 0.5\ 2}\frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{kg}}}, \tag{22}$$

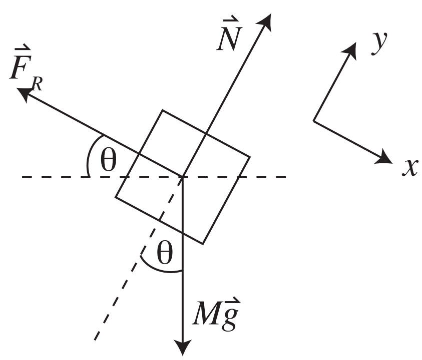
$$= \boxed{\sqrt{\frac{\sqrt{3}(2 + 5\sqrt{3})}{2}}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.} \tag{23}$$

P3. Un bloque de masa M se deja deslizar desde la parte superior de una ladera de altura h que forma un ángulo θ con la horizontal. Entre el bloque y la ladera existe un coeficiente de roce dinámico μ, el cual es suficientemente pequeño como para que el bloque llegue hasta el final de la ladera con rapidez no nula. Al llegar al pie de la ladera, el bloque se sigue deslizando sobre la pista horizontal, esta vez sin roce, hasta chocar de manera perfectamente inelástica con un bloque de masa m. El conjunto de ambos bloques luego se encuentra con un resorte de constante elástica k.



a) (2 pts.) Determine la rapidez del bloque M al momento de llegar al pie de la ladera.

Usamos el teorema de trabajo-energía. Inicialmente, la energía es $E_i = Mgh$. Al pie de la ladera, la energía es $E_f = 1/2Mv_1^2$, con v_1 la rapidez pedida. El camino recorrido por M es $d = h/\operatorname{sen}\theta$, por lo que el trabajo de la fuerza de roce F_R es $W = -F_R d$. Para encontrar F_R, consideramos el diagrama de cuerpo libre.



Usando la segunda ley de Newton en la dirección y, tenemos

$$N = Mg\cos\theta \Rightarrow F_R = \mu N = \mu Mg\cos\theta. \tag{24}$$

Juntando, se tiene

$$E_f - E_i = W \Leftrightarrow \frac{1}{2}Mv_1^2 - Mgh = -\frac{\mu Mg\cos\theta h}{\operatorname{sen}\theta}, \tag{25}$$

y despejando, se obtiene

$$\boxed{v_1 = \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu}{\tan\theta}\right)}.} \tag{26}$$

b) (1 pt.) Determine la rapidez de ambos bloques luego del choque.

Como el choque es perfectamente inelástico, se conserva momentum pero no energía. El momentum antes del choque es horizontal y tiene magnitud

$$p_1 = Mv_1. \tag{27}$$

El momentum después del choque tiene magnitud

$$p_2 = (M+m)v_2. \tag{28}$$

Igualando y resolviendo para v_2, se obtiene

$$\boxed{v_2 = \frac{M}{M+m}\ v_1 = \frac{M}{M+m}\sqrt{2gh\left(1-\frac{\mu}{\tan\theta}\right)}.} \tag{29}$$

c) (1.5 pts.) Determine la cantidad de energía mecánica que se disipa durante la colisión.

Antes del choque, la energía es $E_1 = 1/2Mv_1^2$. Después del choque, la energía es $E_2 = 1/2(M+m)v_2^2$. La energía disipada será $\Delta E = E_1 - E_2$. Reemplazando los resultados, se tiene

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \frac{1}{2}Mv_1^2 - \frac{1}{2}(M+m)\frac{M^2}{(M+m)^2}v_1^2, && (30)\\
&= \frac{1}{2}Mv_1^2\left(1-\frac{M}{M+m}\right), && (31)\\
&= \frac{1}{2}Mv_1^2\frac{m}{M+m}, && (32)\\
&= \boxed{\frac{Mmgh}{M+m}\left(1-\frac{\mu}{\tan\theta}\right).} && (33)
\end{aligned}$$

d) (1.5 pts) Determine la máxima compresión del resorte.

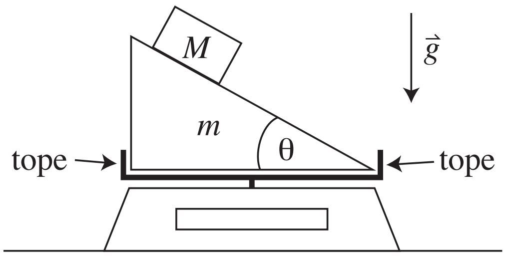
Como no hay roce en la superficie horizontal, se debe conservar la energía mecánica después del choque, E_2. Cuando el resorte llega a su máxima compresión (δ_{max}), la energía mecánica es puramente elástica, $E_3 = 1/2k\delta_{\text{max}}^2$. Entonces,

$$\frac{1}{2}(M+m)v_2^2 = \frac{1}{2}k\delta_{\text{max}}^2 \Rightarrow \delta_{\text{max}}^2 = \frac{(M+m)v_2^2}{k}. \tag{34}$$

Reemplazando los resultados obtenidos anteriormente, se llega a

$$\boxed{\delta_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2M^2gh}{k(M+m)}\left(1-\frac{\mu}{\tan\theta}\right)}.} \tag{35}$$

Bonus: Por hasta 0.5 pts. adicionales en el control, Ud. puede contestar esta pregunta. No hay penalización en caso de no entregarla. En la figura se muestra un bloque de masa M que cae por la superficie de una cuña de masa m, sin fricción. El sistema está sobre una balanza.



a) (0.25 pts) Indique si el peso que se indicaría en la balanza es:

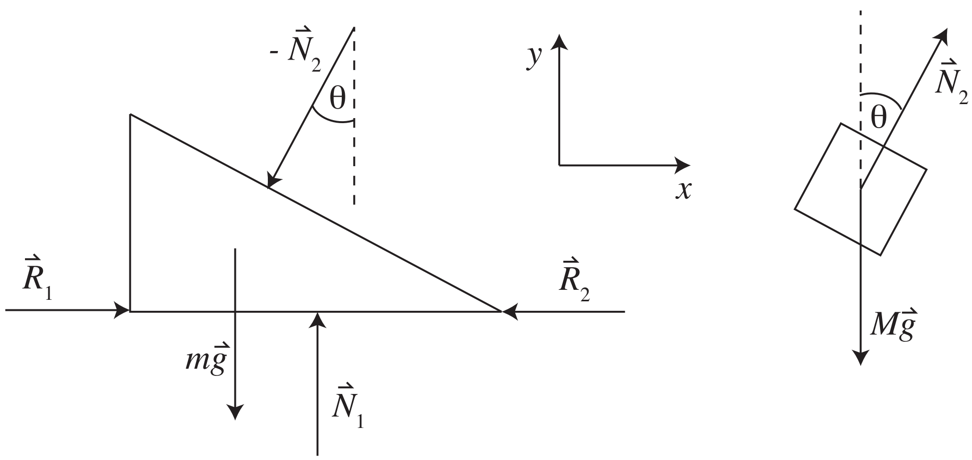
(I) igual a $(M+m)g$,

(II) menor que $(M+m)g$,

(III) mayor que $(M+m)g$.

Justifique su respuesta, usando las leyes de Newton. No se requiere un valor exacto, solo que explique la razón por la que escogió una de estas respuestas.
Nota: Quizás le conviene pensar qué ocurre si Ud. se trata de pesar sobre una balanza al interior de un ascensor que está acelerando.

Veamos los diagramas de cuerpo libre de la cuña y del bloque.



El bloque M cae por la cuña, por lo que tiene una aceleración que tiene componentes tanto en la dirección x como en la dirección y: $\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y}$, donde $a_y < 0$ pues el bloque cae. Si vemos la segunda ley de Newton para M en la dirección y, se tiene que

$$N_2 \cos\theta - Mg = Ma_y \Rightarrow N_2 \cos\theta = Mg + Ma_y < Mg. \tag{36}$$

En otras palabras, la componente vertical de $\vec{N}_2$ es menor que el peso de M. Por acción y reacción, la componente vertical de $-\vec{N}_2$ (la reacción de N_2 en la cuña) tiene igual magnitud pero sentido contrario. Se deduce entonces que la cuña siente un peso menor que Mg debido al bloque que va cayendo, y por lo tanto la balanza va a medir un peso menor que $(M+m)g$.

b) (0.25 pts.) La bandeja de la balanza sobre la que descansa la cuña tampoco tiene roce, pero unos topes impiden que resbale hacia derecha y/o izquierda. Sin embargo, uno de ellos es innecesario. Indique cuál y justifique su respuesta.

Mirando el diagrama de cuerpo libre para la cuña, nos damos cuenta que $-\vec{N}_2$ tiene una componente horizontal hacia la izquierda. Esta fuerza tiende a mover a la cuña en esa dirección, por lo que se requiere un tope a la izquierda de la cuña que ejerza una fuerza hacia la derecha ($\vec{R}_1$). El tope de la derecha no es necesario, se podría tener equilibrio si $\vec{R}_2$ fuera cero.