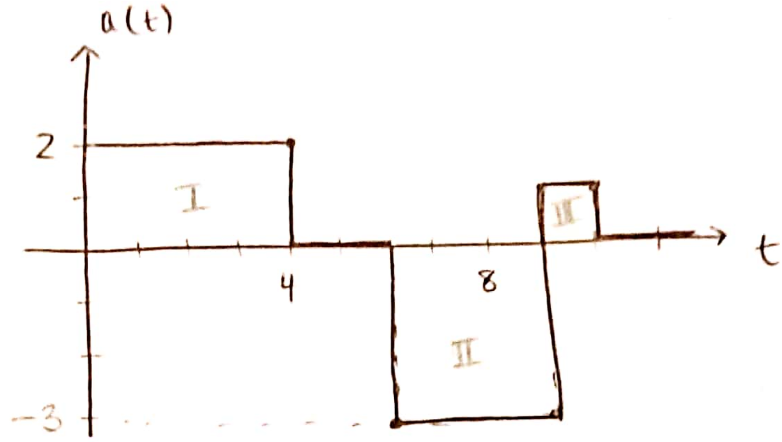
Pauta Auxiliar #4

P1) se tiene $a(t)$



a) Aceleración en c/ instante.

Del gráfico vemos que

$$a(t) = \begin{cases} 2\ m/s^2 & 0 \le t \le 4s \\ 0\ m/s^2 & 4s < t \le 6s \\ -3\ m/s^2 & 6s < t \le 9s \\ 1\ m/s^2 & 9s < t \le 10s \\ 0\ m/s^2 & t < 10s \end{cases}$$

b) si en $t=0$ la partícula está en reposo, encuentre $v(t)$ y grafique.

Vamos por intervalos sabemos que el área bajo la curva en un gráfico a v/s t es : $\boxed{A = V(t^*) - V_0}$

con t^* el tiempo final y V_0 la velocidad en el t inicial

I) $a(t) = 2\ m/s$ desde $t=0$ hasta $t^* = 4s$

$$A = \text{base} \cdot \text{altura} = (4s)\cdot(2\ m/s^2) = 8\ m/s$$

$$\Rightarrow 8\ m/s = V(4s) - V_0$$

Como la partícula está en reposo en $t=0 \Rightarrow V_0 = V(t=0) = 0$

$$\Rightarrow V(t=4s) = 8\ m/s$$

lo anterior no nos dio $V(t)$, solo $V(t^*)$ Pero si calculamos el área hasta un tiempo t arbitrario, tq $0 \le t \le 4s$, entonces.

$$A(t) = \text{base}(t)\cdot\text{altura} = \underbrace{(t - 0s)}_{t_{final} - t_{inicial}}\cdot 2\,m/s^2 = (2\,m/s^2)\cdot t$$

luego, $A(t) = 2(m/s^2)\cdot t = V(t) - \cancel{V_0}^{\,0}$

$$\Rightarrow \boxed{V(t) = (2\,m/s^2)t \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq 4s} \;\ldots (1)$$

De $t_0 = 4s$ hasta $t = 6s$, $a(t) = 0 \Rightarrow A = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = V(t) - V_0 \quad , \quad V_0 = V(t_0 = 4s) \overset{(1)}{=} 2\cdot 4 = 8\,m/s$$

$$\Rightarrow \boxed{V(t) = 8\,m/s \quad \text{para} \quad 4s < t \leq 6s} \;\ldots (2)$$

II] $a(t) = -3\,m/s^2$ desde $t_0 = 6s$ hasta $t = 9s$.

$$A(t) = (t - t_0)\cdot(-3\,m/s^2) = (t - 6s)(-3\,m/s^2)$$

$$\Rightarrow (t - 6s)(-3\,m/s^2) = V(t) - V(t_0) = V(t) - V(6s)$$

de (2), $V(6s) = 8\,m/s$ por lo que:

$$\Rightarrow (-3\,m/s^2)(t - 6s) = V(t) - 8\,m/s \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \boxed{V(t) = 8\,m/s - (3\,m/s^2)(t - 6s) \;;\; 6s < t \leq 9s}$$

III] $a(t) = 1\,m/s^2$ desde $t_0 = 9s$ hasta $t = 10s$

$$A(t) = (t - t_0)(1\,m/s^2) = (t - 9s)(1\,m/s^2)$$

$$\Rightarrow (1\,m/s^2)(t - 9s) = V(t) - V(t_0) = V(t) - V(9s)$$

de (3), $V(9s) = 8\,m/s - (3\,m/s^2)(9 - 6s) = 8 - 3(3)$

$= 8 - 9\,m/s = -1\,m/s \Rightarrow V(9s) = -1\,m/s$

P1) Continuación:

$$\Rightarrow \quad (1\ m/s^2)(t-9s) = v(t) + 1\ m/s \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = -1\ m/s + (1\ m/s^2)(t-9s) \quad ; \quad 9s < t \leq 10s}$$

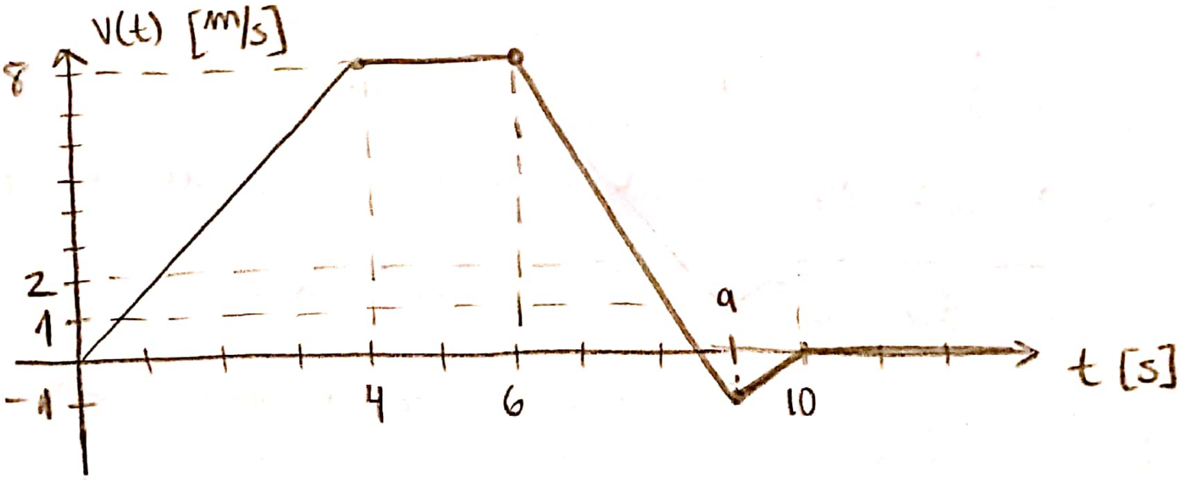
Para $t > 10\ s$, $a(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad A(t) = 0 = v(t) - v(t_0 = 10s)$

de (4), $v(t_0 = 10\ s) = -1\ m/s + (1\ m/s^2)(10s - 9s) = 0\ m/s$

$$\Rightarrow \quad v(t) - v(10s) = v(t) - 0\ m/s = \cancelto{0}{A(t)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = 0\ m/s \quad \text{para} \quad t > 10s}$$

Graficando.



c) Propuesto.

P2| Persona camina a v. constante v. Luego de avanzar una distancia D, un ciclista entra al parque con velo. $u > v$.

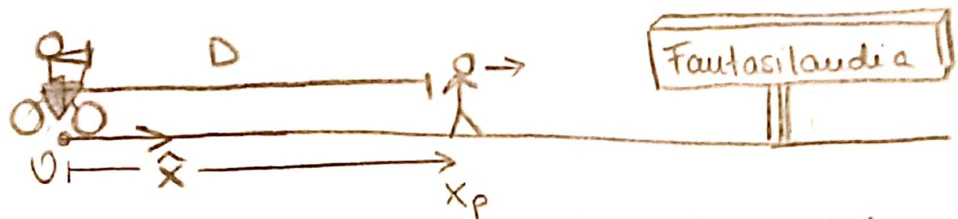
a) ¿cuánto demora el ciclista en pasar junto al peatón?

Datos. $\{v, D, u\}$

Planteamos las ecs de itinerario del peatón y ciclista

Peatón: $$X_p(t) = X_0 + V_0 \cdot t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

* Fijar origen (en 0 del dibujo)



* Fijar $t=0$

Fijaremos $t=0$ cuando el ciclista entra al parque.

Así, para el peatón:
$$\begin{cases} X_0 = D & \text{(posición inicial)} \\ V_0 = V & \text{(positiva)} \\ a_0 = 0 & \text{(velocidad constante)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_p(t) = D + V \cdot t}$$

Ciclista: $$X_c(t) = X_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

Como en $t=0$ justo entró al parque.
$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ V_0 = u \\ a_0 = 0 \ (v.\ cte) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_c(t) = ut}$$

Luego, peatón y ciclista se encontrarán cuando sus posiciones sean iguales, al tiempo t^*. Es decir:

$$X_p(t^*) \overset{!}{=} X_c(t^*) \quad \text{para algún } t^*.$$

$$\Rightarrow D + vt^* \overset{!}{=} ut^* \Rightarrow D = t^*(u - v)$$

$$\Rightarrow \boxed{t^* = D/(u-v)}$$

∴ El ciclista demora t^* en pasar junto al peatón.

b) ¿Cuánta dist. recorrió cada uno?

Evaluamos $X_p(t^*)$ y $X_c(t^*)$.

$$X_p(t^*) = D + V t^* = D + V\left(\frac{D}{\mu - V}\right) = \frac{D(\mu - V) + VD}{\mu - V}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_p(t^*) = \frac{D\mu}{\mu - V}}$$ → Dist. recorrida por el peatón

$$X_c(t^*) = \mu t^* = \mu\left(\frac{D}{\mu - V}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{\mu D}{\mu - V} = X_c(t^*)}$$

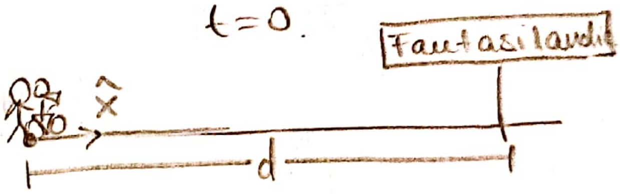
↳ dist. recorrida por el ciclista.

→ Notar que son iguales!

P2 c) Entre el punto que se encuentran y Fantasilandia hay una dist. d. El ciclista va de ida y a la vuelta: ¿cuánto tiempo se demoran en volver a cruzarse?

Ahora coloquemos el origen en el punto en que se cruzan por primera vez, y desde ahí mediremos el tiempo ($t=0$).

Como al llegar al punto d, el ciclista cambia su velocidad repentinamente, tendremos que dividir el problema en dos.



1) Ciclista va de ida: planteamos las $x_p(t)$ y $x_c(t)$.

$$x_p^{(1)}(t) = 0 + v \cdot t = vt \quad ; \quad x_c^{(1)}(t) = 0 + u t = u t$$

Veamos cuánto tiempo pasa hasta que el ciclista llega a d. Para eso, imponemos: $x_c^{(1)}(t_1) \overset{!}{=} d$

... con t_1 el tiempo en que eso ocurre. Desarrollando:

$$\Rightarrow u t_1 = d \Rightarrow \boxed{t_1 = d/u}$$

... y veamos dónde va la persona cuando eso ocurre:

$\boxed{x_p(t_1) = v t_1}$ → posición de la persona en t_1.

2) Ciclista va de vuelta: planteamos $x_p(t)$ y $x_c(t)$.

$$x_p^{(2)}(t) = x_0 + vt \quad \text{con } x_0 = v t_1 = v\left(\frac{d}{u}\right)$$ → posición inicial de la persona

$$\Rightarrow x_p^{(2)}(t) = v\frac{d}{u} + vt \quad ; \quad x_c^{(2)}(t) = d - u t$$

ahora su velocidad es en el eje $-\hat{x}$

* Notar que seguimos con el origen de antes!

Veamos para qué tiempo t_2 se cruzan:

$$x_p^{(2)}(t_2) \overset{!}{=} x_c^{(2)}(t_2) \Rightarrow v\frac{d}{u} + v t_2 \overset{!}{=} d - u t_2$$

1a) Continuación:

Despejamos t_2:

$$t_2(v+u) = d - d\frac{v}{u} = d\left(1-\frac{v}{u}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{t_2 = \frac{d}{v+u}\left(1-\frac{v}{u}\right)} \rightarrow$$ tiempo en que se cruzan, desde que el ciclista llegó a Fantasilandia

Así, finalmente el tiempo total en que vuelven a cruzarse por segunda vez es:

$$T = t_1 + t_2 = \frac{d}{u} + \frac{d}{v+u}\left(1-\frac{v}{u}\right)$$

$$= \frac{d}{u} + \frac{d}{v+u}\left(\frac{u-v}{u}\right)$$

$$= \frac{d}{u}\left(1+\frac{u-v}{v+u}\right) = \frac{d}{u}\left(\frac{v+u+u-v}{v+u}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{2d}{v+u}} \rightarrow$$ tiempo total en que se cruzan por segunda vez, desde que se cruzaron por primera vez.

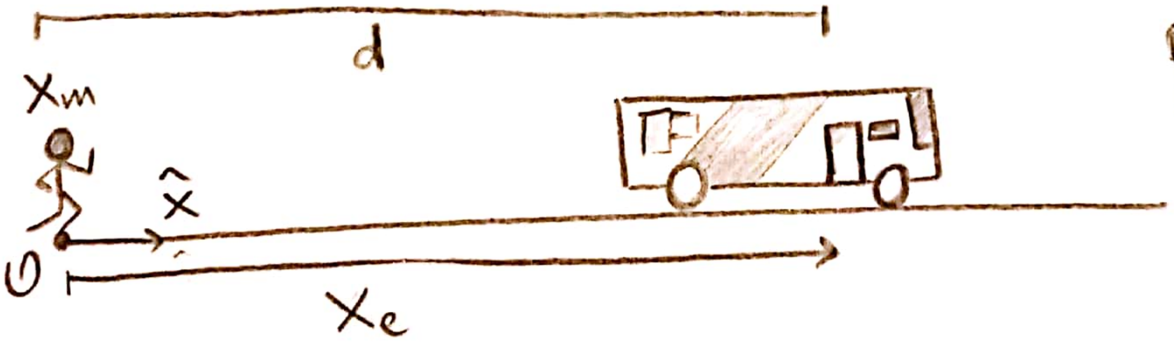
Escaneado con CamScanner

→ Datos: $\{v, a\}$

P3 Mechón corre con $v = 4\ m/s$ para alcanzar la 506e. cuando esté a dist. d de la puerta, la micro comienza a moverse con $a = 0{,}4\ m/s^2$ alejándose del mechón.

a) Plantee $x(t)$ para mechón y micro.

Fijaremos $t=0$ cuando la micro comienza a moverse, y nuestro sist. de coord. como.



· $X_e(t)$ será la posición de la puerta de la micro 506e.

luego, planteamos:

$$X_m(t) = X_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \quad ; \quad X_0 = 0,\ V_0 = V,\ a_0 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{X_m(t) = Vt} \rightarrow \text{Posición del mechón}$$

$$X_e(t) = X_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad ; \quad X_0 = d,\ \overbrace{V_0 = 0}^{\text{comienza a moverse en } t=0!},\ a_0 = +a$$

Escaneado con CamScanner

P3) Continuación:

$$\Rightarrow \boxed{x_e(t) = d + \frac{1}{2}at^2}$$ → Posición de la micro

b) Si $d = 12$ m y el mechón sigue corriendo, ¿alcanzará a subirse? Para que se suba, la posición del mechón y de la micro deben ser iguales para algún tiempo t^*.

Veamos

$$x_m(t^*) \overset{!}{=} x_e(t^*)$$

$$\Rightarrow \quad vt^* \overset{!}{=} d + \frac{1}{2}at^{*2} \qquad /\cdot 2/a$$

$$\Rightarrow \boxed{t^{*2} - \frac{2v}{a}t^* + \frac{2d}{a} = 0}$$

Ecuación cuadrática para t^*.

Si existe solución t^* real, entonces sí alcanza a subirse

$$t^* = \frac{2v/a \pm \sqrt{(2v/a)^2 - 4(2d/a)}}{2} = \frac{\frac{2v}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{4v^2}{a^2}\right) - \frac{8d}{a}}}{2}$$

Ahora reemplazamos los datos: $v = 4$ m/s, $a = 0{,}4$ m/s^2, $d = 12$ m

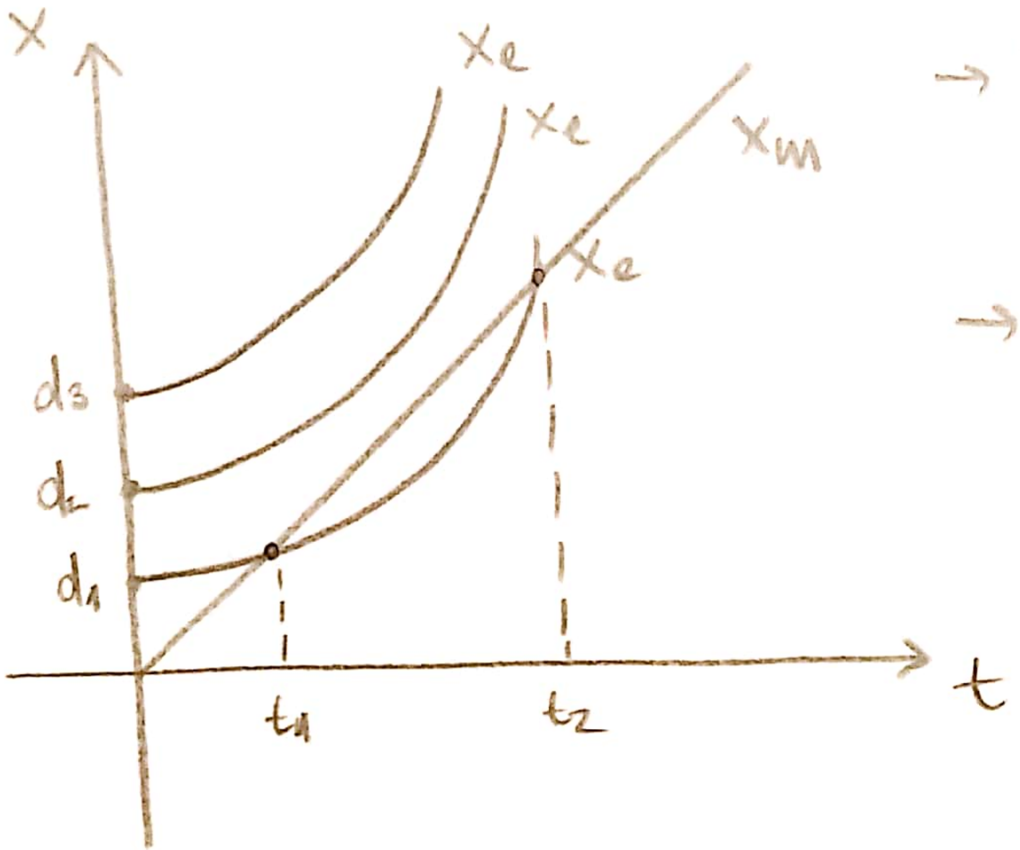
$$\Rightarrow t^* = \frac{8/0{,}4 \pm \sqrt{\left(4 \cdot 16/0{,}4^2\right) - 8 \cdot 12/0{,}4}}{2}$$

$$= \frac{20 \pm \sqrt{400 - 240}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{160}}{2} = \begin{cases} \frac{20 + 12{,}65}{2} \\ \frac{20 - 12{,}65}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow t^* = \begin{cases} 16{,}325 > 0 \\ 3{,}675 > 0 \end{cases}$$

⇒ Sí alcanza a subirse a la micro! Demora 3,675 s

c) Grafique $x_e(t)$ y $x_m(t)$ para distintos valores de d.



$\rightarrow x_e(t) = d + \frac{1}{2}at^2$ es una parábola

$\rightarrow x_m(t) = vt$ es una recta. que pasa por el origen con pendiente v.

Vemos que si x_m intersecta x_e, entonces el mechón logra subirse a la micro!

d) Propuesto.