1 Clase 1: Trigonometría

1.1 Funciones

Una función es un objeto matemático que se utiliza para expresar la dependencia entre dos magnitudes. Una analogía puede ser comprar pan, ambas magnitudes corresponden al dinero (x) y al pan (y), y la función corresponde al vendedor (f). En otras palabras, tu le pasas dinero (x) al vendedor (f) y este te entrega una cantidad de pan (y). Matemáticamente puede ser expresado como:

$$f(x) = y$$

En mátematica de enseñanza media también vieron funciones, como la función cuadrática $f(x) = x^2$ o la cubica $f(x) = x^3$. En donde la entrada es x y la salida es $y = x^2/x^3$.

Además existe la función inversa. Si se tiene una función f, que le entregas un valor x y te lleva a un valor y, su inversa denotada como f^{-1}, le entregas un valor y y te entrega un valor x. Llevando esto a la analogía del pan y el vendedor. Tu le entregas pan (y) al vendedor y el te entrega dinero (x). Matemáticamente se denota

$$f(x) = y \qquad f^{-1}(y) = x$$

Si reemplazamos, se obtiene

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

Lo anterior muestra que si uno aplica una función a la función inversa, el resultado es la variable.

Ejemplifiquemos con la función $f(x) = x^2$.

Que función es su función inversa?

Consideremos la función $f(x) = x^2$, su inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Demostremos que es su inversa evaluando la inversa en la función:

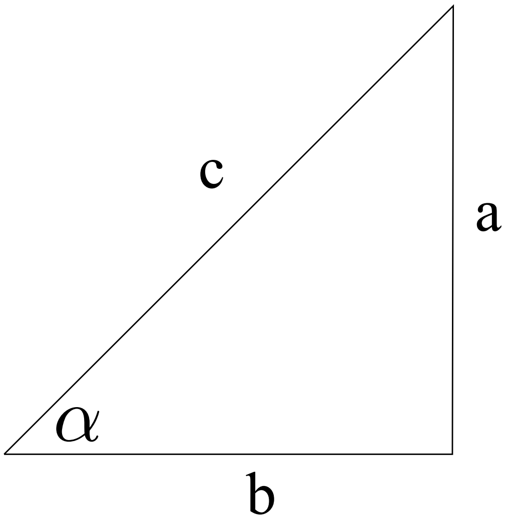
$$f(x) = x^2$$

$$f(f^{-1}(x)) = \sqrt{x}^2 = x$$

Vemos que si evaluamos la función inversa en la función, se obtiene la variable, por lo que demostramos que es su inversa. (Esto será profundizado en cursos de calculo)

1.2 Trigonometría

Consideremos un triángulo rectangulo de lados abc, ángulo recto entre ab y ángulo α,



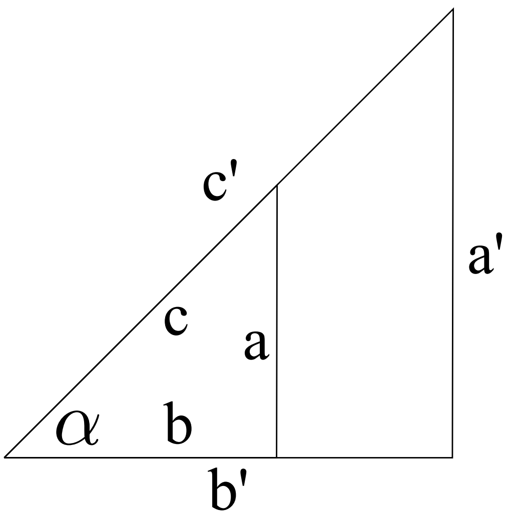
En donde **a** es el cateto opuesto, **b** es el cateto adyacente, **c** es la hipotenusa y α uno de los ángulos del triángulo. En general, como el ángulo α puede estar entre bc y ac, el cateto opuesto corresponde al lado opuesto al ángulo, el cateto adyacente corresponde al lado que esta junto al ángulo que no es la hipotenusa y la hipotenusa es el ángulo opuesto al ángulo recto.

Con estas variables, uno puede definir las siguientes funciones trigonométricas.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{a}{c} \\ \cos(\alpha) &= \frac{b}{c} \end{aligned}$$

Las que son llamados el seno y el coseno del ángulo. Que representan estas cantidades?.

Veamos el siguiente diagrama:



Si calculamos las funciones trigonométricas para el triángulo pequeño y el grande, se obtiene

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \\ \cos(\alpha) &= \frac{b}{c} = \frac{a'}{c'} \end{aligned}$$

Vemos que estas funciones nos muestran la razón que hay entre dos lados del triángulo rectángulo.

Además de estas dos funciones trigonométricas, existen otras que son combinaciones de estados dos, tales como:

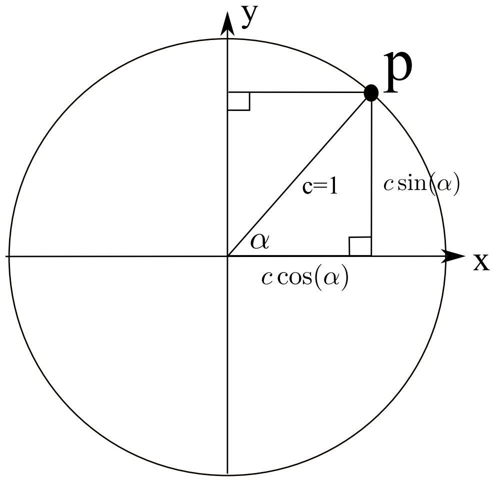
$$\begin{aligned}
\tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\beta)} \\
\cot(\alpha) &= \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\beta)} \\
\csc(\alpha) &= \frac{1}{\sin(\beta)} \\
\sec(\alpha) &= \frac{1}{\cos(\beta)}
\end{aligned}$$

Las que son llamadas tangente, cotangente, cosecante y secante de arriba hacia abajo.

Todos los ángulos desde aquí en adelante se representaran en radianes, por lo que 180 grados corresponde a π y 360 grados a 2π.

1.3 Trigonometría en círculo de radio 1

Ahora veremos como se relacionan las funciones trigonométricas el círculo de radio 1:



En este caso, el radio del circulo entre 0 y π corresponde a la hipotenusa de un ángulo rectángulo, que en este caso tiene valor $c = 1$. Si el ángulo α es conocido, podemos usarlo para poder encontrar el cateto opuesto y adyacente usando las definiciones de las funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \frac{a}{1} \\
\cos(\alpha) &= \frac{b}{1}
\end{aligned}$$

Estos resultados pueden verse en la figura anterior.

Preguntas: Que pasa cuando el punto P se encuentra en el eje x positivo?

Que pasa cuando el punto P se encuentra en el eje x negativo?

Que pasa cuando el punto P se encuentra en el eje y?

Que representan las funciones trigonométricas en el circulo de radio 1?

Si el punto P se encuentra en el eje x positivo, el ángulo $\alpha = 0$. Vemos que la altura del punto P en ese caso es cero, por lo que $\sin(0) = 0$ y además la función coseno en este caso es máxima, por lo que $\cos(0) = 1$.

Si el punto P se encuentra en el eje x negativo, entonces $\alpha = \pi$. En este caso, la altura también es cero, por lo que $\sin(\pi) = 0$, sin embargo, $\cos(\pi) = -1$, ya que la proyección es a la izquierda del centro.

Si el punto P se encuentra en el eje y, entonces la altura es la máxima posible $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ y además vemos que el punto no se aleja del eje x, por lo que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Con estos resultados puede saber que pasa en $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

Podemos ver que en el circulo de radio 1, la función seno representa la proyección del punto P sobre el eje x y la función coseno representa la proyección del punto P sobre el eje y. En otras palabras, la función seno representa la altura del punto P y la función coseno representa lo alejado del centro que esta el punto P en el eje x.

Vemos que los valores del seno y el coseno oscilan entre 1 y -1.

1.4 Teorema de pitágoras

Apliquemos el teorema de pitagoras al círculo de radio 1.

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ 1 &= \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \end{aligned}$$

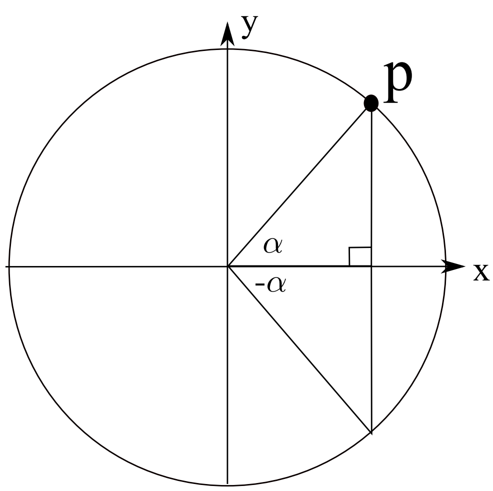
Esta relación entre el coseno y seno es una de las más importantes que existen. Usando las definiciones de las diferentes funciones trigonometricas uno puede llegar a distintas relaciones, como la siguiente:

$$\sin^2(\alpha) = \tan^2(\alpha) + 1$$

(Demuestrela!).

Que pasa cuando se tienen ángulos negativos?, por ejemplo $\sin(-\alpha)$?

Volvamos al circulo de radio 1.



En general, el ángulo crece si se aleja hacia arriba del eje x, mientras que los ángulos negativos se abren en dirección contraria, tal como se muestra en la figura anterior.

De esto, podemos decir lo siguiente con respecto a las funciones trigonométricas:

- Cuando el ángulo es negativo, se puede ver que su altura es la misma que cuando el ángulo es positivo, pero en sentido contrario, por lo que se puede decir que $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

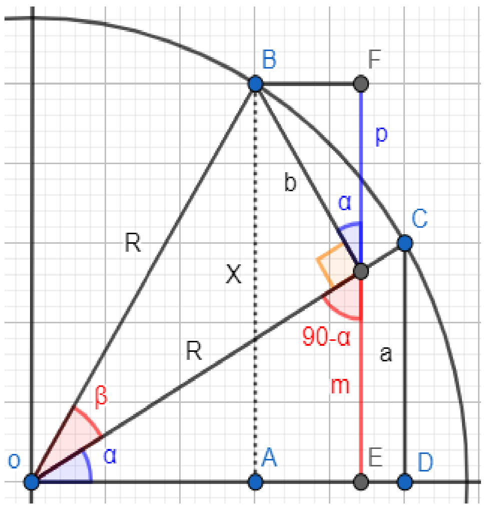
- Vemos que independiente del ángulo positivo o negativo, ambos triángulos comparten la misma proyección en el eje x, por lo que $\cos(-\alpha) = -\cos(\alpha)$.

1.5 Relaciones importantes

Existen dos relaciones importantes que es necesario mencionar de manera particular,

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\sin(\alpha)\end{aligned}$$

para demostrarla usaremos la siguiente figura:



Vemos que

$$\sin(\alpha+\beta) = x = p+m$$

por lo que el objetivo es encontrar x. Del dibujo, podemos ver que $\delta = \pi-\alpha$. Por otro lado, tenemos que $\sin(\alpha) = \frac{m}{y}$ y $\cos(\beta) = \frac{y}{1}$, por lo que $m = \sin(\alpha)y = \sin(\alpha)\cos(\beta)$. Reemplazando,

$$\sin(\alpha+\beta) = p+\sin(\alpha)\cos(\beta)$$

Nos falta el valor de p, para calcularlo calculamos $\cos(\alpha) = \frac{p}{b}$ y $\sin(\beta) = b$, por lo que $p = b\cos(\alpha) = \sin(\beta)\cos(\alpha)$. Finalmente,

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)$$

Demuestre para el coseno!.

Ejemplos: Calcular $\cos(\pi-\alpha)$ y $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$. Vealo también en el circulo de radio 1.

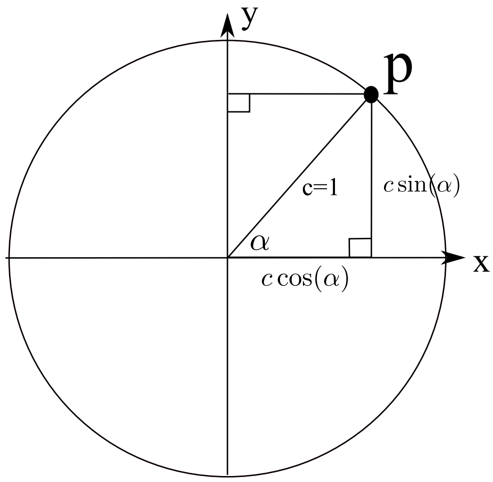
1.6 Funciones Trigonométricas inversas

En el caso de las funciones trigonométricas, para un ángulo dado

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) = x \quad & \alpha = \arcsin(x) \\ \cos(\alpha) = x \quad & \alpha = \arccos(x) \\ \tan(\alpha) = x \quad & \alpha = \arctan(x) \end{aligned}$$

la función inversa encuentra el ángulo asociado a un valor.

Sin embargo, hay un detalle en las funciones trigonométricas inversas.



Vemos que los ángulos van de 0 a 2π.

Que pasa cuando $\alpha > 2\pi$? Los valores del seno y coseno se vuelven a repetir. Esto significa que las funciones trigonométricas son multivaluadas.

Tomemos el siguiente caso: Cuál es el valor del ángulo si se cumple $\cos(\alpha) = 1$?

$\arccos(\alpha) = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots.,$

Tiene infinitas soluciones!!!

Por convención, se tomará solo una solución, por lo que hay que restringir los resultados de α cuando se calcula el arccos y arcsin de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} \arcsin(\alpha) & \alpha & \text{entre} -\frac{\pi}{2} \quad y \quad \frac{\pi}{2} \\ \arccos(\alpha) & \alpha & \text{entre} \quad 0 \quad y \quad \pi \end{array}$$

Hay que tener cuidado con la calculadora al calcular las funciones trigonométricas inversas.

2 Clase 2: Cinemática 1D

2.1 Que es cinemática?

Descripción del movimiento de los cuerpos sin considerar las causas que lo producen (gravedad, alguna fuerza externa). Cada cuerpo en movimiento será considerado como una partícula puntual.

2.2 Posición

Al ser un movimiento unidimensional, solo puede moverse en una recta. Como primer paso para comenzar a resolver problemas es necesario definir un origen y la dirección de los positivos

3 Clase 1: Trigonometría

3.1 Funciones

Una función es un objeto matemático que se utiliza para expresar la dependencia entre dos magnitudes. Una analogía puede ser comprar pan, ambas magnitudes corresponden al dinero (x) y al pan (y), y la función corresponde al vendedor (f). En otras palabras, tu le pasas dinero (x) al vendedor (f) y este te entrega una cantidad de pan (y). Matemáticamente puede ser expresado como:

$$f(x)=y$$

En mátemática de enseñanza media también vieron funciones, como la función cuadrática $f(x)=x^2$ o la cubica $f(x)=x^3$. En donde la entrada es x y la salida es $y=x^2/x^3$.

Además existe la función inversa. Si se tiene una función f, que le entregas un valor x y te lleva a un valor y, su inversa denotada como f^{-1}, le entregas un valor y y te entrega un valor x. Llevando esto a la analogía del pan y el vendedor. Tu le entregas pan (y) al vendedor y el te entrega dinero (x). Matemáticamente se denota

$$f(x)=y \qquad f^{-1}(y)=x$$

Si reemplazamos, se obtiene

$$f(f^{-1}(y))=y$$

Lo anterior muestra que si uno aplica una función a la función inversa, el resultado es la variable.

Ejemplifiquemos con la función $f(x)=x^2$.

Que función es su función inversa?

Consideremos la función $f(x)=x^2$, su inversa es $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$. Demostremos que es su inversa evaluando la inversa en la función:

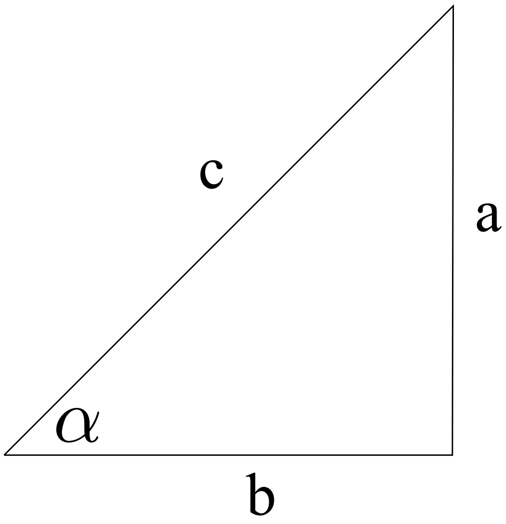
$$f(x)=x^2$$

$$f(f^{-1}(x))=\sqrt{x}^2=x$$

Vemos que si evaluamos la función inversa en la función, se obtiene la variable, por lo que demostramos que es su inversa. (Esto será profundizado en cursos de calculo)

3.2 Trigonometría

Consideremos un triángulo rectangulo de lados abc, ángulo recto entre ab y ángulo α,



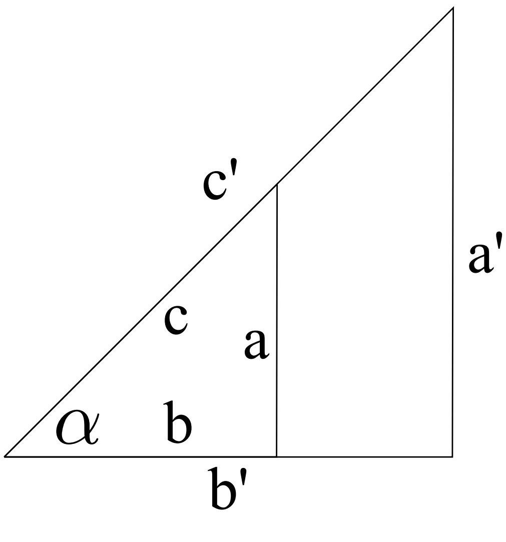
En donde **a** es el cateto opuesto, **b** es el cateto adyacente, **c** es la hipotenusa y α uno de los ángulos del triángulo. En general, como el ángulo α puede estar entre bc y ac, el cateto opuesto corresponde al lado opuesto al ángulo, el cateto adyacente corresponde al lado que esta junto al ángulo que no es la hipotenusa y la hipotenusa es el ángulo opuesto al ángulo recto.

Con estas variables, uno puede definir las siguientes funciones trigonométricas.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \frac{a}{c}\\ \cos(\alpha) &= \frac{b}{c}\end{aligned}$$

Las que son llamados el seno y el coseno del ángulo. Que representan estas cantidades?.

Veamos el siguiente diagrama:



Si calculamos las funciones trigonométricas para el triángulo pequeño y el grande, se obtiene

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}\\ \cos(\alpha) &= \frac{b}{c}=\frac{a'}{c'}\end{aligned}$$

Vemos que estas funciones nos muestran la razón que hay entre dos lados del triángulo rectángulo.

Además de estas dos funciones trigonométricas, existen otras que son combinaciones de estados dos, tales como:

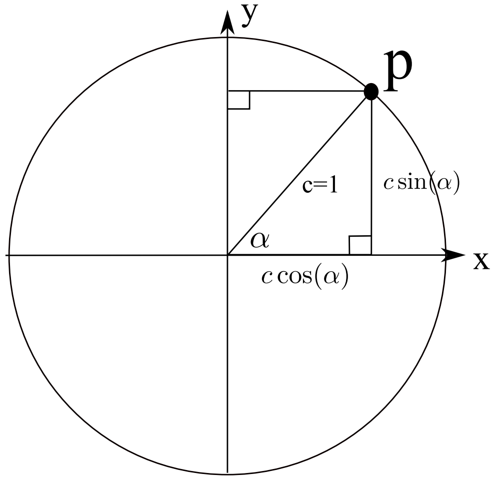
$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\beta)} \\
\cot(\alpha) &= \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\beta)} \\
\csc(\alpha) &= \frac{1}{\sin(\beta)} \\
\sec(\alpha) &= \frac{1}{\cos(\beta)}
\end{aligned}
$$

Las que son llamadas tangente, cotangente, cosecante y secante de arriba hacia abajo.

Todos los ángulos desde aquí en adelante se representaran en radianes, por lo que 180 grados corresponde a π y 360 grados a 2π.

3.3 Trigonometría en círculo de radio 1

Ahora veremos como se relacionan las funciones trigonométricas el círculo de radio 1:



En este caso, el radio del circulo entre 0 y π corresponde a la hipotenusa de un ángulo rectángulo, que en este caso tiene valor $c = 1$. Si el ángulo α es conocido, podemos usarlo para poder encontrar el cateto opuesto y adyacente usando las definiciones de las funciones trigonométricas:

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \frac{a}{1} \\
\cos(\alpha) &= \frac{b}{1}
\end{aligned}
$$

Estos resultados pueden verse en la figura anterior.

Preguntas: Que pasa cuando el punto P se encuentra en el eje x positivo?

Que pasa cuando el punto P se encuentra en el eje x negativo?

Que pasa cuando el punto P se encuentra en el eje y?

Que representan las funciones trigonométricas en el circulo de radio 1?

Si el punto P se encuentra en el eje x positivo, el ángulo $\alpha = 0$. Vemos que la altura del punto P en ese caso es cero, por lo que $\sin(0) = 0$ y además la función coseno en este caso es máxima, por lo que $\cos(0) = 1$.

Si el punto P se encuentra en el eje x negativo, entonces $\alpha = \pi$. En este caso, la altura también es cero, por lo que $\sin(\pi) = 0$, sin embargo, $\cos(\pi) = -1$, ya que la proyección es a la izquierda del centro.

Si el punto P se encuentra en el eje y, entonces la altura es la máxima posible $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ y además vemos que el punto no se aleja del eje x, por lo que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Con estos resultados puede saber que pasa en $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

Podemos ver que en el circulo de radio 1, la función seno representa la proyección del punto P sobre el eje x y la función coseno representa la proyección del punto P sobre el eje y. En otras palabras, la función seno representa la altura del punto P y la función coseno representa lo alejado del centro que esta el punto P en el eje x.

Vemos que los valores del seno y el coseno oscilan entre 1 y -1.

3.4 Teorema de pitágoras

Apliquemos el teorema de pitagoras al círculo de radio 1.

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ 1 &= \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \end{aligned}$$

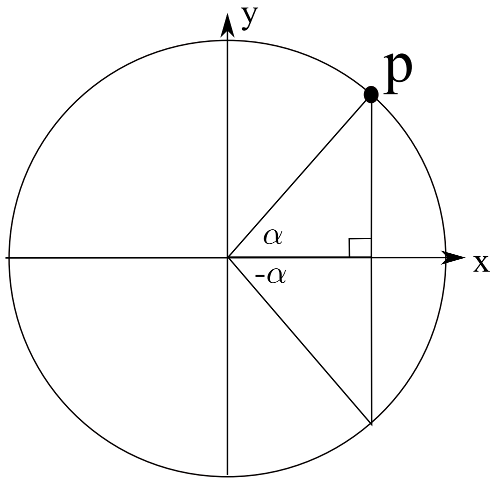
Esta relación entre el coseno y seno es una de las más importantes que existen. Usando las definiciones de las diferentes funciones trigonometricas uno puede llegar a distintas relaciones, como la siguiente:

$$\sin^2(\alpha) = \tan^2(\alpha) + 1$$

(Demuestrela!).

Que pasa cuando se tienen ángulos negativos?, por ejemplo $\sin(-\alpha)$?

Volvamos al circulo de radio 1.



En general, el ángulo crece si se aleja hacia arriba del eje x, mientras que los ángulos negativos se abren en dirección contraria, tal como se muestra en la figura anterior.

De esto, podemos decir lo siguiente con respecto a las funciones trigonométricas:

- Cuando el ángulo es negativo, se puede ver que su altura es la misma que cuando el ángulo es positivo, pero en sentido contrario, por lo que se puede decir que $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

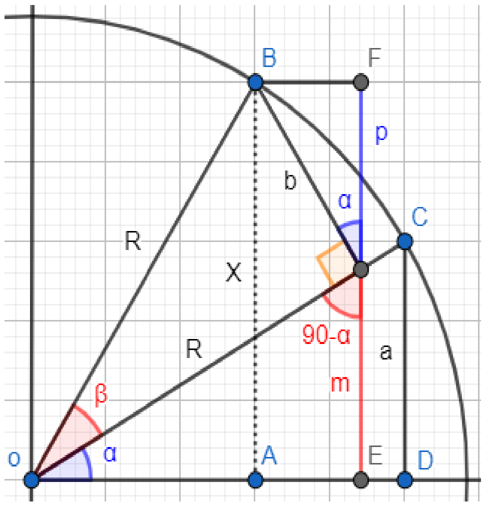
- Vemos que independiente del ángulo positivo o negativo, ambos triángulos comparten la misma proyección en el eje x, por lo que $\cos(-\alpha) = -\cos(\alpha)$.

3.5 Relaciones importantes

Existen dos relaciones importantes que es necesario mencionar de manera particular,

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha) \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\sin(\alpha)
\end{aligned}$$

para demostrarla usaremos la siguiente figura:



Vemos que

$$\sin(\alpha+\beta) = x = p+m$$

por lo que el objetivo es encontrar x. Del dibujo, podemos ver que $\delta = \pi - \alpha$. Por otro lado, tenemos que $\sin(\alpha) = \frac{m}{y}$ y $\cos(\beta) = \frac{y}{1}$, por lo que $m = \sin(\alpha)y = \sin(\alpha)\cos(\beta)$. Reemplazando,

$$\sin(\alpha+\beta) = p+\sin(\alpha)\cos(\beta)$$

Nos falta el valor de p, para calcularlo calculamos $\cos(\alpha) = \frac{p}{b}$ y $\sin(\beta) = b$, por lo que $p = b\cos(\alpha) = \sin(\beta)\cos(\alpha)$. Finalmente,

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)$$

Demuestre para el coseno!.

Ejemplos: Calcular $\cos(\pi-\alpha)$ y $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$. Vealo también en el circulo de radio 1.

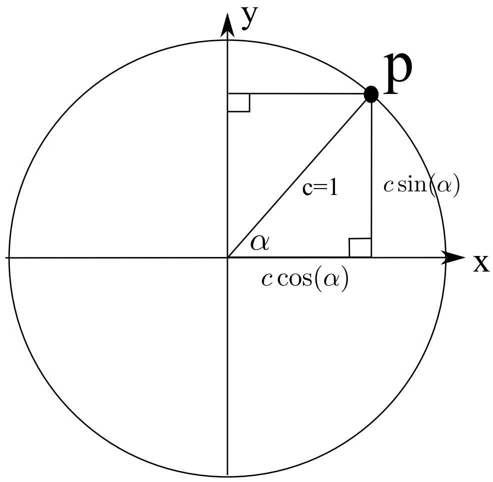
3.6 Funciones Trigonométricas inversas

En el caso de las funciones trigonométricas, para un ángulo dado

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) = x &\qquad \alpha = \arcsin(x) \\
\cos(\alpha) = x &\qquad \alpha = \arccos(x) \\
\tan(\alpha) = x &\qquad \alpha = \arctan(x)
\end{aligned}$$

la función inversa encuentra el ángulo asociado a un valor.

Sin embargo, hay un detalle en las funciones trigonométricas inversas.



Vemos que los ángulos van de 0 a 2π.

Que pasa cuando $\alpha > 2\pi$? Los valores del seno y coseno se vuelven a repetir. Esto significa que las funciones trigonométricas son multivaluadas.

Tomemos el siguiente caso: Cuál es el valor del ángulo si se cumple $\cos(\alpha) = 1$?

$\arccos(\alpha) = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots,$

Tiene infinitas soluciones!!!

Por convención, se tomará solo una solución, por lo que hay que restringir los resultados de α cuando se calcula el arccos y arcsin de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcccc} \arcsin(\alpha) & \alpha & \text{entre} -\frac{\pi}{2} & y & \frac{\pi}{2} \\ \arccos(\alpha) & \alpha & \text{entre} \quad 0 & y & \pi \end{array}$$

Hay que tener cuidado con la calculadora al calcular las funciones trigonométricas inversas.

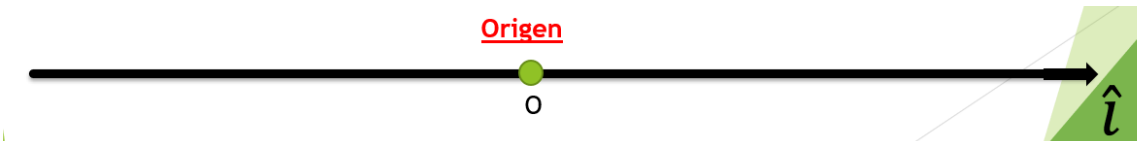
4 Clase 2: Cinemática 1D

4.1 Que es cinemática?

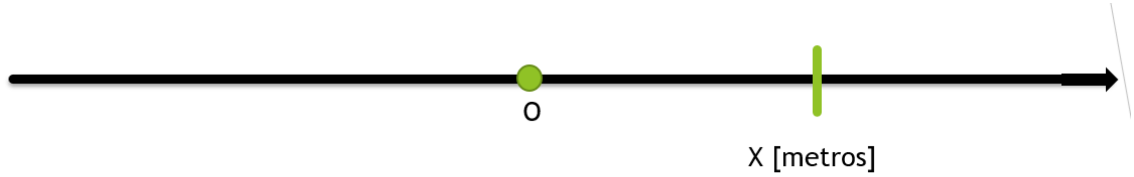
Descripción del movimiento de los cuerpos sin considerar las causas que lo producen (gravedad, alguna fuerza externa). Cada cuerpo en movimiento será considerado como una partícula puntual.

4.2 Posición

Al ser un movimiento unidimensional, solo puede moverse en una recta. Como primer paso para comenzar a resolver problemas es necesario definir un origen y la dirección de los positivos

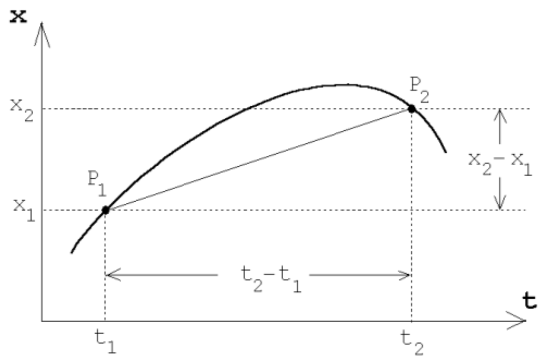


La posición de un cuerpo es la ubicación respecto a ese origen que se define y en el caso anterior, es positivo si se encuentra hacia la derecha y negativo si esta a la izquierda del origen.



Además de una posición, es necesario la unidad de medida de esta posición, puede ser metros, centrimetros, milimetros, kilometros, etc. En general, la descripción del movimiento está completamente determinada si se conoce la posición $x(t)$ en todo instante de tiempo.

4.3 Desplazamiento y Velocidad Media



El desplazamiento responde a la pregunta de cuanto se movio un objeto (d) en un periodo de tiempo $(t_2 - t_1)$. Consideremos dos tiempos distintos $t_1 < t_2$, si un cuerpo esta en un movimiento unidimensional, sus posiciones corresponden a x_1, x_2 respectivamente. El desplazamiento se define como

$$d = x_2 - x_1$$

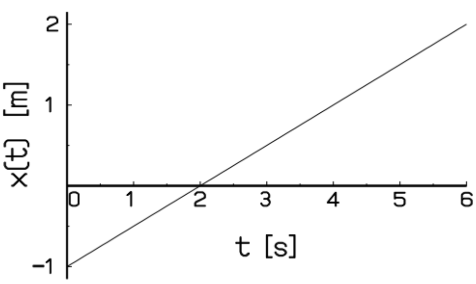
Este valor también puede ser negativo, ya que el objeto puede moverse hacia la izquierda. Otra pregunta que surge es a que velocidad el cuerpo se movió desde $x_2 - x_1$. Podemos también definir la **velocidad media** de una partícula durante un intervalo $[t_1, t_2]$

$$\boldsymbol{\bar{v}(t_1, t_2) \quad = \quad \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}}$$

Vemos que, la velocidad media es la pendiente de la recta que une el punto 2 y el punto 1, además vemos que corresponde a la tangente del ángulo entre esa recta y el eje horizontal. Esto entrega información global sobre el movimiento de la partícula.

Si ambos puntos, P1 y P2, estan muy cercas y la diferencia de tiempo entre ellos es infinitamente pequeña, hablamos de la velocidad instantanea de la partícula en ese instante de tiempo, siendo la pendiente de la curva en ese punto la velocidad.

4.4 Ecuaciones de itinerario



Este gráfico corresponde a un cuerpo moviendose con velocidad constante. Calculando la velocidad media,

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1-0}{4-2}\left[\frac{m}{s}\right] \\ v_0 &= \frac{1}{2}\left[\frac{m}{s}\right] \end{aligned}$$

la velocidad media es $0.5[\frac{m}{s}]$, que en este caso es constante. Esta gráfica corresponde a una ecuación de la recta, que puede escribirse como $y(x) = a + bx$, en donde b es la pendiente de la recta y a es el intersecto con el eje y. Usando las variables del problema corresponde a

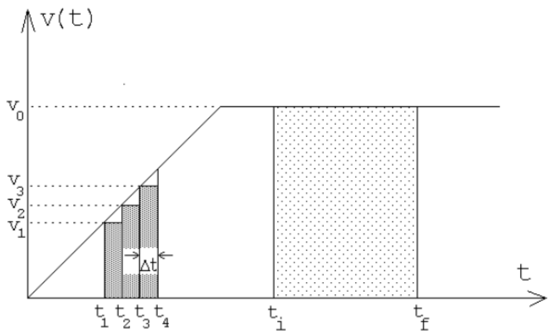
$$x(t) = x_0 + v_0 t$$

Esta ecuación muestra la posición en cada instante de tiempo cuando la aceleración es cero. El gráfico de la velocidad en función del tiempo en este mismo sistema corresponde a una recta horizontal. En general, como la velocidad es constante, la velocidad media también lo será independiente del intervalo de tiempo, por lo que

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \\ d = x(t_2) - x(t_1) &= v_0(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

En este caso y de manera general, el desplazamiento es el **área bajo la curva del gráfico de velocidad vs tiempo**. Si tomamos t_1 como 0, el tiempo t2 como algún tiempo mayor que cero, obtenemos la ecuacion $x(t)$ anterior.

Para derivar estas ecuaciones, consideremos el gráfico de velocidad vs tiempo:



Tomemos el caso aceleración constante, por lo que la aceleración media es constante. Entonces:

$$\begin{aligned} v(t_2) - v(t_1) &= a(t_2 - t_1) \\ v(t_2) &= v(t_1) + a(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

Si consideramos t_1 el tiempo initial y t_2 cualquier tiempo futuro de este, entonces:

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

En donde t_0 es el tiempo inicial, que generalmente puede ser considerado cero, v_0 es la velocidad inicial, $v(t)$ es la velocidad en cada instante de tiempo y a es la aceleración, que es constante. A esta ecuación se le llama la **ecuación de itinerario de la velocidad** cuando la aceleración es constante. Si calculamos el area bajo de la curva cuando el movimiento es acelerado corresponde a

$$\begin{aligned} x(t_2) - x(t_1) &= v_0(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1) \\ x(t_2) &= x(t_1) + v_0(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

Si consideramos el tiempo inicial t_0, entonces

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t_2 - t_0)$$

Que corresponde a la ecuación de itinerario de la posición en función del tiempo.

4.5 Resumen

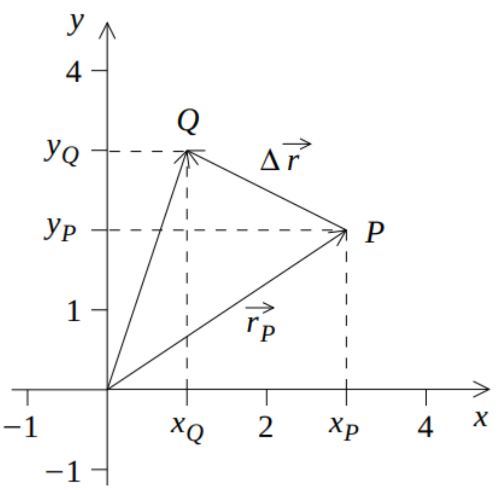
- Primero es necesario definir el origen y los positivos
- Identificar las condiciones iniciales (tiempo, posición y velocidad)
- Reemplazarlas en las ecuaciones de itinerario y resolver

5 Cinematica en dos y tres dimensiones

5.1 Vectores

Para poder estudiar cinematica en mas dimensiones, es necesario definir lo que es un vector. Algunas cantidades vectoriales en la vida corresponden a la posición, velocidad, fuerza, etc. Por otro lado, existen cantidades que no son vectores, como la masa, temperatura y tiempo. Los vectores $\vec{A}$ son representados por una flecha, cada vector esta conformado por el modulo del vector $|\vec{A}| = A$, que corresponde a la longitud de esta flecha. Además posee una dirección, que corresponde al ángulo que forma con la horizontal.

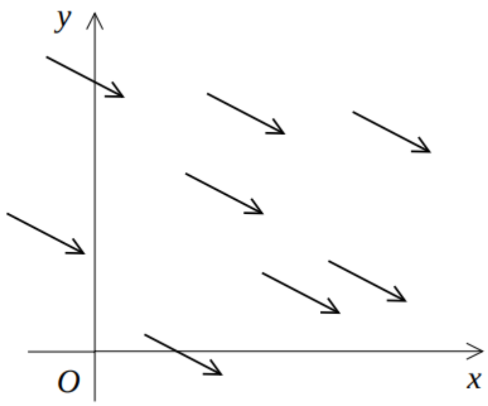
Para poder describir los vectores, es necesario un origen, por ejemplo, consideremos el vector Q y P



Cada vector puede ser descrito por una cantidad que se denomina par ordenado, por ejemplo, el punto P esta en una posición x_p en el eje $\hat{x}$ y y_p en el eje $\hat{y}$, por lo que el par ordenado correspondiente el punto P corresponde a (x_p,y_p). El punto Q corresponde a (x_q,y_q). El primer número siempre corresponde a la coordenada en el eje x y el segundo a la coordenada en el eje y. El vector corresponde al trazo que va desde el origen hasta el punto P o Q, a este trazo podemos denotarlo por $\vec{r}_p$. Además de la notación como par ordenado, la notación que usaremos de un vector será la siguiente: $\vec{r}_p = x_p\hat{x} + y_p\hat{y}$. La notación como par ordenado es equivalente a la flecha. La dirección del vector $\vec{r}_p$ puede calcularse calculando el ángulo entre el vector y la horizontal, en este caso, para calcular el ángulo podemos calcular la tangente $\tan(\gamma) = \frac{y_p}{x_p}$. Existe otra propiedad del vector que corresponde al sentido, que es hacia donde esta apuntando la flecha.

5.1.1 Igualdad de vectores

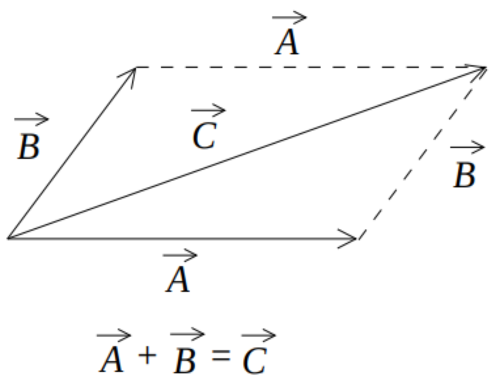
Dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud y apuntan en la misma dirección, por ejemplo, en la siguiente figura se tienen un conjunto de vectores iguales.



5.1.2 Suma de vectores

Si tenemos los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Existen dos maneras de poder sumar vectores, la analítica y la gráfica.

Para sumar gráficamente, es necesario hacer lo que se muestra en la siguiente figura:

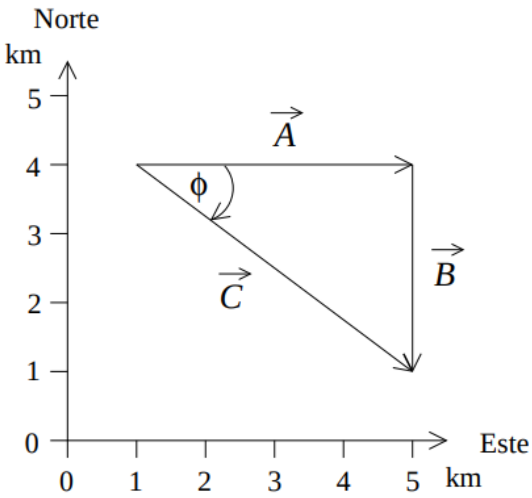


Esta técnica se llama la regla del paralelogramo.

La manera analítica de sumar vectores es la siguiente: Si tenemos $\vec{A} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y}$ y $\vec{B} = b_x\hat{x} + b_y\hat{y}$, entonces basta con sumar las componentes

$$\begin{aligned} \vec{C} &= \vec{A} + \vec{B} \\ &= a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + b_x\hat{x} + b_y\hat{y} \\ &= (a_x + b_x)\hat{x} + (a_y + b_y)\hat{y} \end{aligned}$$

Ejemplo: Un excursionista parte desde una cierta posición y camina 4 km hacia el Este y luego 3 km hacia el Sur. Calcule el vector suma $\vec{C}$ de ambas maneras y la dirección del vector.



Existen algunas propiedades extras de la suma de vectores:

$$\begin{aligned}
\text{Conmutatividad: } \vec{A}+\vec{B} &= \vec{B}+\vec{A} \\
\text{Asociatividad: } \vec{A}+(\vec{B}+\vec{C}) &= (\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} \\
\text{Existe un valor nulo } \vec{A}+0 &= \vec{A} \\
\text{Inverso Aditivo } \vec{A}+(-\vec{A}) &= 0
\end{aligned}$$

Con respecto a la resta $\vec{A}-\vec{B}$, basta con sumar el inverso aditivo de $\vec{B}$. Suponemos que $\vec{C}=\vec{A}-\vec{B}$, de esto, obtenemos que $\vec{A}=\vec{B}+\vec{C}$. Esto significa que el vector $\vec{C}$ corresponde al vector que une el vector $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cuando ambos tienen el mismo origen.

Multiplicar vectores por vectores trae una complicación extra, por lo que veremos mas adelante. Sin embargo, un vector puede facilmente ser multiplicado por un escalar α.

5.1.3 Multiplicación

La multiplicación de un vector $\vec{A}=a_x\hat{x}+a_y\hat{y}$ por un número escalar α (número real), se define como un nuevo vector $\vec{B}=\alpha\vec{A}=\alpha(a_x\hat{x}+a_y\hat{y})=\alpha a_x\hat{x}+\alpha a_y\hat{y}$. Analíticamente basta con multiplicar cada coordenada por α. Si el valor de $\alpha>0$, entonces mantiene la la dirección y el sentido y amplifica el módulo por un valor α. Si es negativo, mantiene la dirección pero cambia el sentido.

Algunas propiedades de la multiplicación:

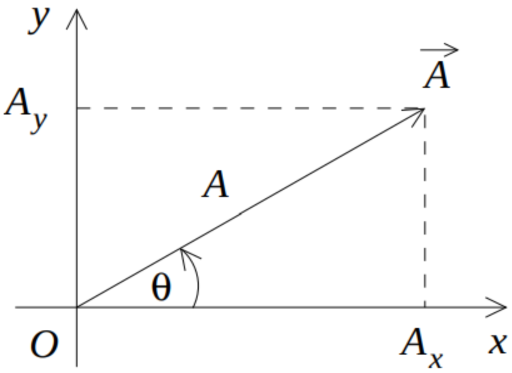
$$\begin{aligned}
\alpha(\vec{A}+\vec{B}) &= \alpha\vec{A}+\alpha\vec{B} \\
(\alpha+\beta)\vec{A} &= \alpha\vec{A}+\beta\vec{A} \\
(\alpha\beta)\vec{A} &= \alpha(\beta\vec{A}) \\
1\vec{A} &= \vec{A}
\end{aligned}$$

5.1.4 Componentes cartesianas y polares de un vector.

Hasta ahora, hemos visto como se escribe un vector en coordenadas cartesianas. Sin embargo, existe otra manera de poder escribirlo, en coordenadas polares.

Si en coordenadas cartesianas, para describir totalmente un vector solo es necesario la componente $x e y$ del vector. Por otro lado, el mismo vector puede escribirse en coordenadas polares, estos dos valores son el módulo del vector y el ángulo que forma con la horizontal. Si un vector $\vec{A}$ puede escribirse en coordenadas cartesianas como (a_x, a_y), en coordenadas polares puede verse como (A,θ), en donde

$$
\begin{aligned}
A &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \\
\theta &= \arctan\left(\frac{A_y}{A_x}\right)
\end{aligned}
$$



En sentido contrario, si tenemos las coordenadas polares del vector (A, θ), entonces

$$
\begin{aligned}
A_x &= \mathrm{A}\cos(\theta) \\
A_y &= \mathrm{A}\sin(\theta)
\end{aligned}
$$

Ejercicio: Demuestre las propiedades de la suma y la multiplicación por escalar usando las coordenadas polares.

5.1.5 Vector Unitario

Un vector unitario es un vector que tiene módulo 1, este vector suele denotar la dirección de un vector. Por ejemplo, nosotros usamos el vector unitario $\hat{x}$ que denota la dirección en x.

El vector unitario de un vector cualquiera $\vec{A}$ puede ser definido como

$$
\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}
$$

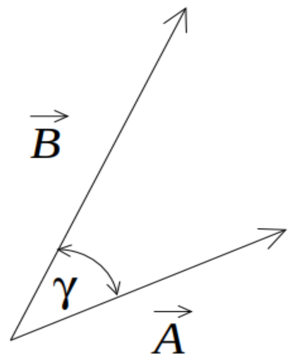
Los vectores unitarios que mas usaremos serán los que denotan las direcciónes en x e y.

5.1.6 Producto Punto o escalar

El producto de dos vectores es un poco mas complicado,

Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores. El producto punto entre ambos vectores corresponde a

$$
\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos(\gamma)
$$



En donde γ es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Se puede observar que el producto punto entre dos vectores es un número real. Además se puede interpretar como el produco entre el modulo de un vector ($\vec{A}$) y el modulo de la proyección del otro vector ($\vec{B}$) sobre el vector $\vec{A}$.

Si ambos vectores son paralelos, el producto punto es el producto de ambos modulos, en cambio, si son perpendiculares, entonces es cero.

Los productos puntos siguen la propiedad de conmutatividad y distributividad

$$\begin{aligned} \vec{A}\cdot\vec{B} &= \vec{B}\cdot\vec{A} \\ \vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) &= \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C} \end{aligned}$$

Se puede demostrar que $A=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$.

Otra manera de definir el producto punto es el siguiente:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

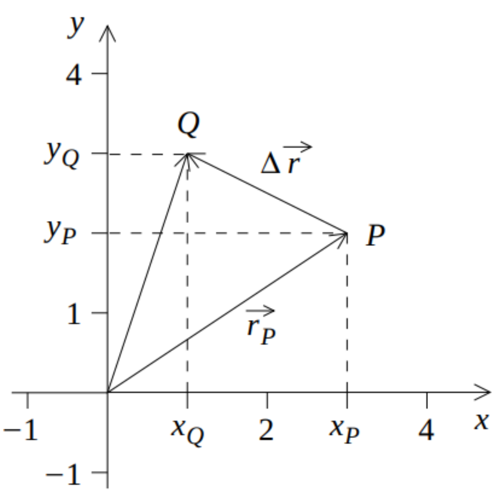
Ejemplo:

Calcule el ángulo entre los vectores $\vec{A}=\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}$ y $\vec{A}=-\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}$

5.2 Cinematica 3D

Ahora que tenemos el conocimiento de vectores, vamos a volver a definir las cantidades que ya habiamos definido en una dimension:

5.2.1 Desplazamiento



Si alguien viaja entre P y Q, el desplazamiento en una dimensión era la posición final menos la posición inicial, en este caso, como es un vector, el vector que une P y Q corresponde a

$$\vec{d} \;=\; \vec{r}_q - \vec{r}_p$$

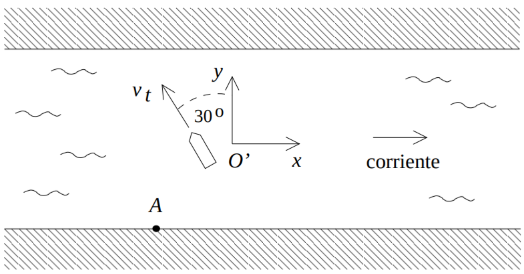
5.2.2 Velocidad Relativa

Supongamos que una partícula A se mueve con velocidad $\vec{v}_A$ y una partícula B se mueve con velocidad $\vec{v}_B$, entonces la velocidad con que A observa como se mueve B es

$$\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

Se dice que $\vec{v}$ es la velocidad relativa de B respecto a A.

Ejemplo:



Suponga que la corriente de un canal tiene una velocidad de 10km/h en dirección Este. Un transbordador navega a una velocidad de 20km/hora en la dirección que aparece en el dibujo con respecto a la corriente. ¿Cuál es la velocidad y dirección del transbordador según el observador situado en la rivera?

Hasta ahora hemos usado solo sistemas de referencia que se encuentran quietos, sin embargo, es posible elejir sistemas de referencias que esten en movimiento con respecto a algún observador externo. La unica condición para poder definir algún sistema de referencia es que no esté acelerando.

Primero definimos el sistema de referencia como se muestra en la figura, en este caso, el sistema de referencia esta con respecto a la corriente, por lo que, visto desde el punto de vista del sistema de referencia O', el punto fijo en la orilla se mueve con velocidad

$$\vec{v}_A^{o'} = -10[\text{km}/h]\,\hat{x}$$

Por otro lado, el enunciado nos dice que el transbordador viaja a una velocidad con respecto a la corriente, por lo que la velocidad del transbordador con respecto a O' es:

$$\vec{v}_t^{o'} = \left(-20\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{x} + 20\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{y}\right)[\text{km}/h] = (-10\hat{x} + 10\sqrt{3}\,\hat{y})[\text{km}/h]$$

Luego, por definición de velocidad relativa:

$$\vec{v}_t^{o'} = \vec{v}_t^{o} - \vec{v}_c^{o}$$

Por lo tanto

$$\vec{v}_t^{o} = \vec{v}_t^{o'} + \vec{v}_c^{o}$$

Reemplazamos y obtenemos

$$\vec{v}_t^o = ((-10\hat{x} + 10\sqrt{3}\,\hat{y}) + 10\hat{x})[\mathrm{km}/h]$$

$$\vec{v}_t^o = 10\sqrt{3}\,\hat{y}[\mathrm{km}/h]$$

Lo que significa que el barco se esta movimiento solo en el eje y desde el punto de vista de la orilla.

5.2.3 Principio de superposición

Asi como el desplazamiento corresponde a un vector, entonces podemos escribir las ecuaciones de itinerario como

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t-t_0)^2 \\ \vec{v}(t) &= \vec{v}_0 + \vec{a}(t-t_0)\end{aligned}$$

En donde $\vec{r}(t) = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}$ y $\vec{v}(t) = v_x\,\hat{x} + v_y\,\hat{y} + v_z\,\hat{z}$

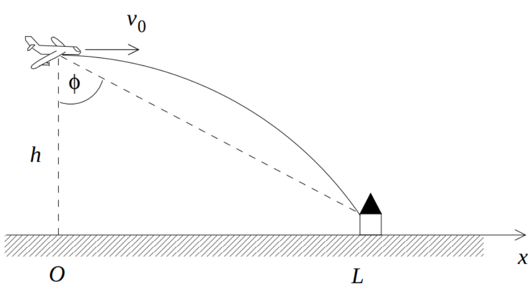
Usando las propiedades de los vectores obtenemos

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x\,t^2 \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y\,t^2 \\ z(t) &= x_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z\,t^2\end{aligned}$$

Como podemos ver, cada componente espacial puede describirse de manera independiente de las otras coordenadas. Esto corresponde al principio de superposición, que es la capacidad de poder describir cada coordenada como un movimiento independiente, cuyo resultado final es la suma de cada componente. Con este resultado uno puede describir facilmente movimientos parabolicos como el lanzamiento de una bala.

5.2.4 La bala le llegara al cuerpo que cae al mismo tiempo?

5.2.5 Caida Libre



Un bombardero de flores vuela con una velocidad horizontal v_0, constante, y a una altura h en una trayectoria que pasa directamente por sobre su objetivo. ¿A qué ángulo de visión ϕ debe soltar la bomba, de forma que este llegue a su objetivo?.

Antes de comenzar a calcular, como L no es conocido, podemos relacionar el ángulo ϕ con h y L, $\tan(\phi) = L/h$. Por lo que basta calcular L.

Primero definimos el origen de las coordenadas, que será en O. Luego, identificamos las condiciones iniciales.

En este caso, la flor al momento de salir del avión va con la misma velocidad que el avión, por lo que $\vec{v}_i = v_0\hat{x}$, y posición inicial corresponde a $\vec{r}_0 = h\,\hat{y}$. Luego, las ecuaciones de itinerario corresponden a :

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \\ y(t) &= h - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Luego, en un tiempo $t = \tau$, se tiene

$$\begin{aligned} x(\tau) &= L = v_0\tau \\ y(\tau) &= 0 = h - \frac{1}{2}g\tau^2 \end{aligned}$$

Por lo que $\tau = L/v_0$, reemplazamos esto en la otra ecuación

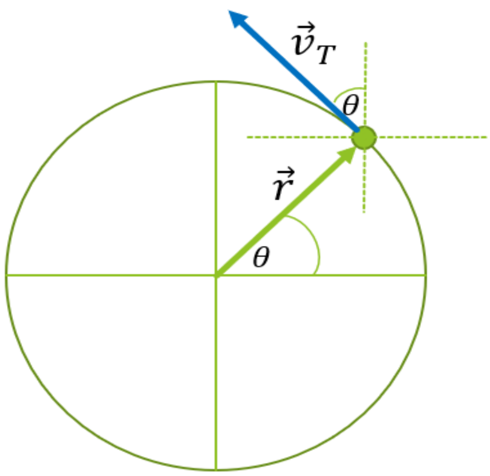
$$L = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Con esto, podemos obtener el valor de ϕ.

Analizar para diferentes velocidades el resultado. v_0 infinito, h infinito?.

5.2.6 Movimiento Circular Uniforme

Otro movimiento que se puede estudiar es el movimiento circular. Tomemos el siguiente circulo de radio r



El movimiento circular uniforme significa que el ángulo cambia de manera constante con el tiempo

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

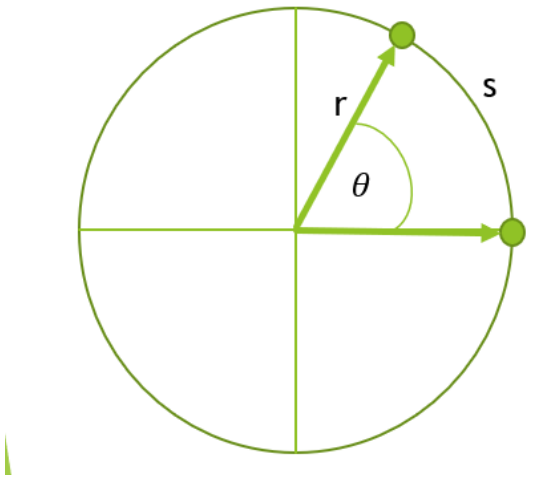
En donde ω es la llamada velocidad angular y sus unidades son radianes/seg. Esta ecuacion es similar a la ecuación de itinerario de la posición. Por otro lado, podemos escribir la posición del punto en función del tiempo

$$\vec{r}(t) = r\cos(\omega t)\hat{x} + r\sin(\omega t)\hat{y}$$

Por otro lado, el punto también tiene una velocidad, esta es llamada la velocidad tangencial y siempre es paralela a la recta tangente que pasa por el punto. En este caso

$$\vec{v_T}(t) = -v_T\sin(\omega t)\hat{x} + v_T\cos(\omega t)\hat{y}$$

Podemos escribir el modulo de la velocidad tangencial en función de la velocidad angular. Para esto, necesitamos el siguiente dibujo:



En el movimiento rectilineo uniforme, la velocidad es la distancia dividido el tiempo, en este caso, la velocidad, que es la tangencial, corresponde a

$$v_T \ = \ \frac{s}{t}$$

En donde s es la longitud del arco y t es el tiempo. Podemos escribir la longitud del arco como $s = r\theta$, por lo que

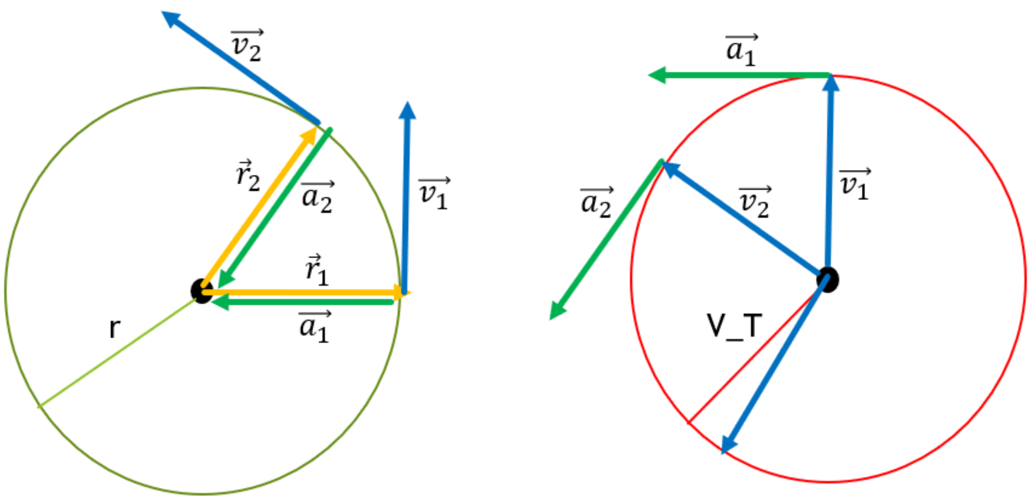
$$v_T \ = \ \frac{r\theta}{t}$$

Usando la ecuación de itinerario del ángulo, vemos que $\omega = \frac{\theta}{t}$, por lo tanto

$$v_T \ = \ \omega r$$

Otro punto importante es la aceleración centrípeta. Esta aceleración es **necesaria** para que exista el movimiento circular. Un movimiento circular es un movimiento acelerado muy partícular, ya que esta aceleración es necesaria para que haya un movimiento circular, uniforme o acelerado.

Para visualizar y calcular la aceleración centrípeta, usaremos el siguiente dibujo:



Primero que todo, el módulo de la velocidad es siempre constante, solo cambia su dirección. Lo mismo pasa con la aceleración centrípeta en el movimiento circular. Podemos ver que en $\vec{r}_1$, la velocidad tangencial es hacia arriba, en el punto superior la velocidad tangencial irá hacia la izquierda. Si damos una vuelta completa, vemos que la velocidad tangencial tambien forma un círculo y en vez de que exista una velocidad tangencial, corresponde a la aceleración. Si movemos esos vectores al círculo de la posición, podemos darnos cuenta que siempre apunta hacia el centro del círculo. Esa es una descripción cualitativa de la aceleración centrípeta, para poder verlo desde un punto de vista analítico, vamos a calcular la velocidad tangencial y la aceleración tangencial usando el tiempo que les toma en dar una vuelta.

Si el punto da una vuelta completa en un tiempo t, entonces el módulo de la velocidad tangencial corresponde a

$$v_T = \frac{2\pi r}{t}$$

Podemos hacer lo mismo con la aceleración centrípeta:

$$a_c = \frac{2\pi v_T}{t}$$

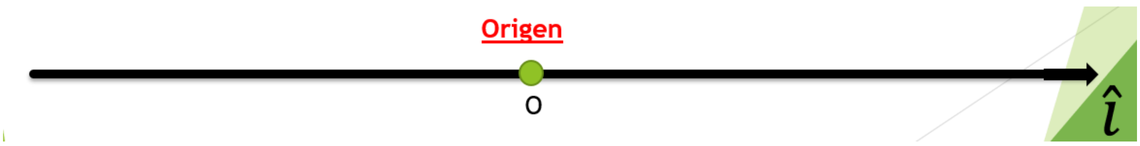
Si despejamos el tiempo en una ecuación y la reemplazamos en la otra, se obtiene

$$a_c = \frac{v_T^2}{r}$$

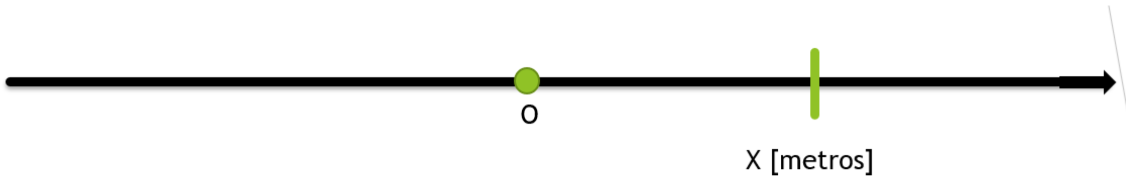
En resumen:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \text{Posición de la partícula, desde el origen al borde del círculo} \\
\vec{v}_T &= \text{Velocidad tangencial, siempre tangente al círculo} \\
\vec{a}_c &= \text{Aceleración centrípeta, apunta hacia el centro del círculo} \\
\omega &= \text{Velocidad angular} \\
a_c &= \frac{v_T^2}{r} \\
a_c &= rw^2 \\
v_T &= rw
\end{aligned}$$

Coordenadas Polares en el movimiento circular.

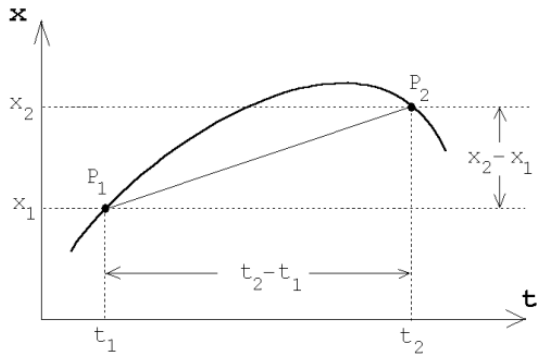


La posición de un cuerpo es la ubicación respecto a ese origen que se define y en el caso anterior, es positivo si se encuentra hacia la derecha y negativo si esta a la izquierda del origen.



Además de una posición, es necesario la unidad de medida de esta posición, puede ser metros, centrimetros, milimetros, kilometros, etc. En general, la descripción del movimiento está completamente determinada si se conoce la posición $x(t)$ en todo instante de tiempo.

5.3 Desplazamiento y Velocidad Media



El desplazamiento responde a la pregunta de cuanto se movio un objeto (d) en un periodo de tiempo $(t_2 - t_1)$. Consideremos dos tiempos distintos $t_1 < t_2$, si un cuerpo esta en un movimiento unidimensional, sus posiciones corresponden a x_1, x_2 respectivamente. El desplazamiento se define como

$$d = x_2 - x_1$$

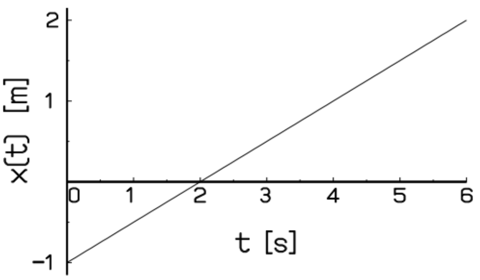
Este valor también puede ser negativo, ya que el objeto puede moverse hacia la izquierda. Otra pregunta que surge es a que velocidad el cuerpo se movió desde $x_2 - x_1$. Podemos también definir la **velocidad media** de una partícula durante un intervalo $[t_{1,}t_2]$

$$\boldsymbol{\bar{v}(t_1, t_2) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}}$$

Vemos que, la velocidad media es la pendiente de la recta que une el punto 2 y el punto 1, además vemos que corresponde a la tangente del ángulo entre esa recta y el eje horizontal. Esto entrega información global sobre el movimiento de la partícula.

Si ambos puntos, P1 y P2, estan muy cercas y la diferencia de tiempo entre ellos es infinitamente pequeña, hablamos de la velocidad instantanea de la partícula en ese instante de tiempo, siendo la pendiente de la curva en ese punto la velocidad.

5.4 Ecuaciones de itinerario



Este gráfico corresponde a un cuerpo moviendose con velocidad constante. Calculando la velocidad media,

$$v_0 = \frac{1-0}{4-2}\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$v_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{m}{s}\right]$$

la velocidad media es $0.5[\frac{m}{s}]$, que en este caso es constante. Esta gráfica corresponde a una ecuación de la recta, que puede escribirse como $y(x) = a + bx$, en donde b es la pendiente de la recta y a es el intersecto con el eje y. Usando las variables del problema corresponde a

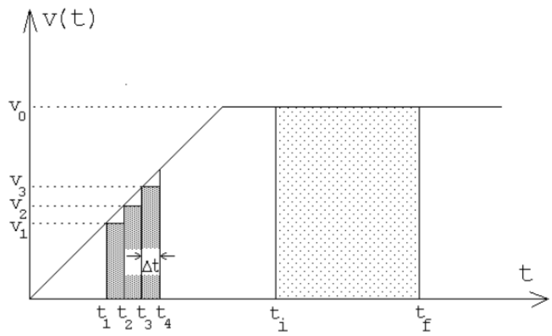
$$x(t) = x_0 + v_0 t$$

Esta ecuación muestra la posición en cada instante de tiempo cuando la aceleración es cero. El gráfico de la velocidad en función del tiempo en este mismo sistema corresponde a una recta horizontal. En general, como la velocidad es constante, la velocidad media también lo será independiente del intervalo de tiempo, por lo que

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \\ d = x(t_2) - x(t_1) &= v_0(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

En este caso y de manera general, el desplazamiento es el **área bajo la curva del gráfico de velocidad vs tiempo**. Si tomamos t_1 como 0, el tiempo t2 como algún tiempo mayor que cero, obtenemos la ecuacion $x(t)$ anterior.

Para derivar estas ecuaciones, consideremos el gráfico de velocidad vs tiempo:



Tomemos el caso aceleración constante, por lo que la aceleración media es constante. Entonces:

$$\begin{aligned} v(t_2) - v(t_1) &= a(t_2 - t_1) \\ v(t_2) &= v(t_1) + a(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

Si consideramos t_1 el tiempo initial y t_2 cualquier tiempo futuro de este, entonces:

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

En donde t_0 es el tiempo inicial, que generalmente puede ser considerado cero, v_0 es la velocidad inicial, $v(t)$ es la velocidad en cada instante de tiempo y a es la aceleración, que es constante. A esta ecuación se le llama la **ecuación de itinerario de la velocidad** cuando la aceleración es constante. Si calculamos el area bajo de la curva cuando el movimiento es acelerado corresponde a

$$\begin{aligned} x(t_2)-x(t_1) &= v_0(t_2-t_1)+\frac{1}{2}a(t_2-t_1) \\ x(t_2) &= x(t_1)+v_0(t_2-t_1)+\frac{1}{2}a(t_2-t_1) \end{aligned}$$

Si consideramos el tiempo inicial t_0, entonces

$$x(t) = x_0+v_0(t-t_0)+\frac{1}{2}a(t_2-t_0)$$

Que corresponde a la ecuación de itinerario de la posición en función del tiempo.

5.5 Resumen

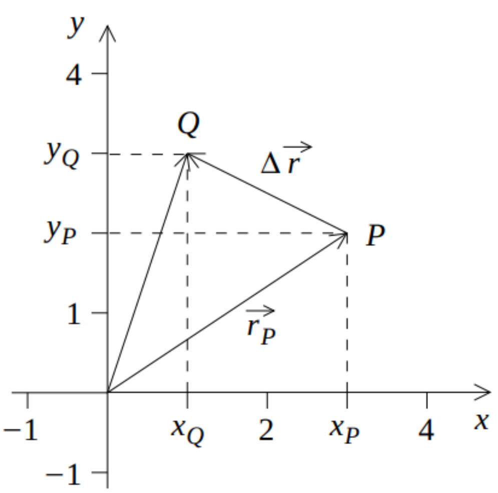
- Primero es necesario definir el origen y los positivos
- Identificar las condiciones iniciales (tiempo, posición y velocidad)
- Reemplazarlas en las ecuaciones de itinerario y resolver

6 Cinematica en dos y tres dimensiones

6.1 Vectores

Para poder estudiar cinematica en mas dimensiones, es necesario definir lo que es un vector. Algunas cantidades vectoriales en la vida corresponden a la posición, velocidad, fuerza, etc. Por otro lado, existen cantidades que no son vectores, como la masa, temperatura y tiempo. Los vectores $\vec{A}$ son representados por una flecha, cada vector esta conformado por el modulo del vector $|\vec{A}| = A$, que corresponde a la longitud de esta flecha. Además posee una dirección, que corresponde al ángulo que forma con la horizontal.

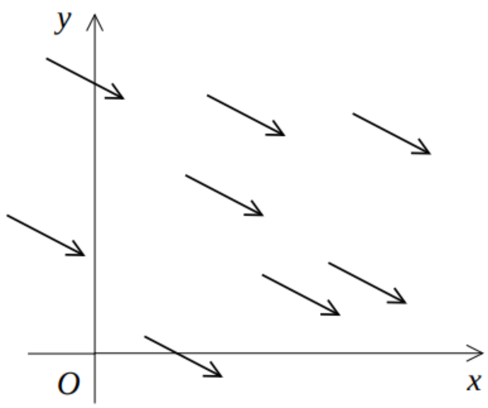
Para poder describir los vectores, es necesario un origen, por ejemplo, consideremos el vector Q y P



Cada vector puede ser descrito por una cantidad que se denomina par ordenado, por ejemplo, el punto P esta en una posición x_p en el eje $\hat{x}$ y y_p en el eje $\hat{y}$, por lo que el par ordenado correspondiente el punto P corresponde a (x_p,y_p). El punto Q corresponde a (x_q,y_q). El primer número siempre corresponde a la coordenada en el eje x y el segundo a la coordenada en el eje y. El vector corresponde al trazo que va desde el origen hasta el punto P o Q, a este trazo podemos denotarlo por $\vec{r}_p$. Además de la notación como par ordenado, la notación que usaremos de un vector será la siguiente: $\vec{r}_p = x_p\hat{x} + y_p\hat{y}$. La notación como par ordenado es equivalente a la flecha. La dirección del vector $\vec{r}_p$ puede calcularse calculando el ángulo entre el vector y la horizontal, en este caso, para calcular el ángulo podemos calcular la tangente $\tan(\gamma) = \frac{y_p}{x_p}$. Existe otra propiedad del vector que corresponde al sentido, que es hacia donde esta apuntando la flecha.

6.1.1 Igualdad de vectores

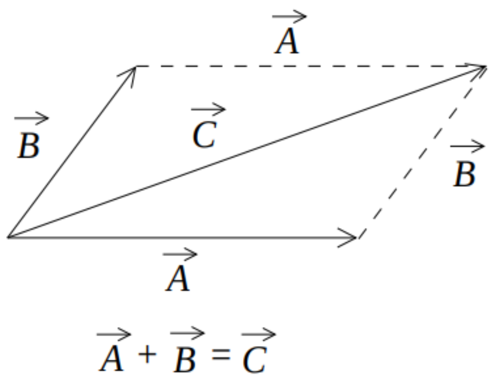
Dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud y apuntan en la misma dirección, por ejemplo, en la siguiente figura se tienen un conjunto de vectores iguales.



6.1.2 Suma de vectores

Si tenemos los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Existen dos maneras de poder sumar vectores, la analítica y la gráfica.

Para sumar gráficamente, es necesario hacer lo que se muestra en la siguiente figura:

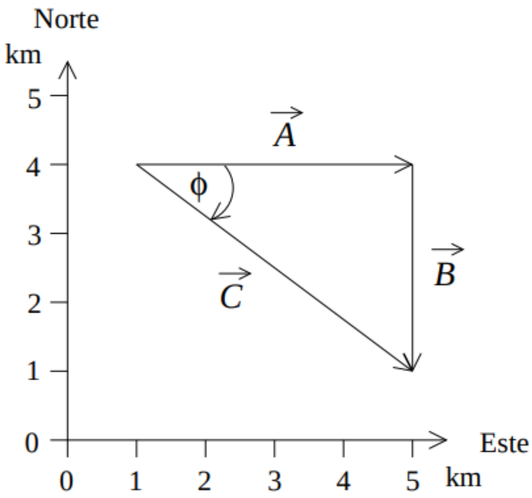


Esta técnica se llama la regla del paralelogramo.

La manera analítica de sumar vectores es la siguiente: Si tenemos $\vec{A} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y}$ y $\vec{B} = b_x\hat{x} + b_y\hat{y}$, entonces basta con sumar las componentes

$$\begin{aligned}
\vec{C} &= \vec{A} + \vec{B} \\
&= a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + b_x\hat{x} + b_y\hat{y} \\
&= (a_x + b_x)\hat{x} + (a_y + b_y)\hat{y}
\end{aligned}$$

Ejemplo: Un excursionista parte desde una cierta posición y camina 4 km hacia el Este y luego 3 km hacia el Sur. Calcule el vector suma $\vec{C}$ de ambas maneras y la dirección del vector.



Existen algunas propiedades extras de la suma de vectores:

$$\begin{aligned}
\text{Conmutatividad: } \vec{A}+\vec{B} &= \vec{B}+\vec{A} \\
\text{Asociatividad: } \vec{A}+(\vec{B}+\vec{C}) &= (\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} \\
\text{Existe un valor nulo } \vec{A}+0 &= \vec{A} \\
\text{Inverso Aditivo } \vec{A}+(-\vec{A}) &= 0
\end{aligned}$$

Con respecto a la resta $\vec{A}-\vec{B}$, basta con sumar el inverso aditivo de $\vec{B}$. Suponemos que $\vec{C}=\vec{A}-\vec{B}$, de esto, obtenemos que $\vec{A}=\vec{B}+\vec{C}$. Esto significa que el vector $\vec{C}$ corresponde al vector que une el vector $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cuando ambos tienen el mismo origen.

Multiplicar vectores por vectores trae una complicación extra, por lo que veremos mas adelante. Sin embargo, un vector puede facilmente ser multiplicado por un escalar α.

6.1.3 Multiplicación

La multiplicación de un vector $\vec{A}=a_x\hat{x}+a_y\hat{y}$ por un número escalar α (número real), se define como un nuevo vector $\vec{B}=\alpha\vec{A}=\alpha(a_x\hat{x}+a_y\hat{y})=\alpha a_x\hat{x}+\alpha a_y\hat{y}$. Analíticamente basta con multiplicar cada coordenada por α. Si el valor de $\alpha>0$, entonces mantiene la la dirección y el sentido y amplifica el módulo por un valor α. Si es negativo, mantiene la dirección pero cambia el sentido.

Algunas propiedades de la multiplicación:

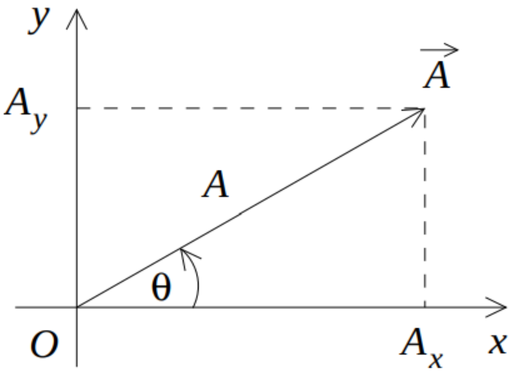
$$\begin{aligned}
\alpha(\vec{A}+\vec{B}) &= \alpha\vec{A}+\alpha\vec{B} \\
(\alpha+\beta)\vec{A} &= \alpha\vec{A}+\beta\vec{A} \\
(\alpha\beta)\vec{A} &= \alpha(\beta\vec{A}) \\
1\vec{A} &= \vec{A}
\end{aligned}$$

6.1.4 Componentes cartesianas y polares de un vector.

Hasta ahora, hemos visto como se escribe un vector en coordenadas cartesianas. Sin embargo, existe otra manera de poder escribirlo, en coordenadas polares.

Si en coordenadas cartesianas, para describir totalmente un vector solo es necesario la componente x e y del vector. Por otro lado, el mismo vector puede escribirse en coordenadas polares, estos dos valores son el módulo del vector y el ángulo que forma con la horizontal. Si un vector $\vec{A}$ puede escribirse en coordenadas cartesianas como (a_x, a_y), en coordenadas polares puede verse como (A,θ), en donde

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{A_y}{A_x}\right) \end{aligned}$$



En sentido contrario, si tenemos las coordenadas polares del vector (A, θ), entonces

$$\begin{aligned} A_x &= \mathrm{A}\cos(\theta) \\ A_y &= \mathrm{A}\sin(\theta) \end{aligned}$$

Ejercicio: Demuestre las propiedades de la suma y la multiplicación por escalar usando las coordenadas polares.

6.1.5 Vector Unitario

Un vector unitario es un vector que tiene módulo 1, este vector suele denotar la dirección de un vector. Por ejemplo, nosotros usamos el vector unitario $\hat{x}$ que denota la dirección en x.

El vector unitario de un vector cualquiera $\vec{A}$ puede ser definido como

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}$$

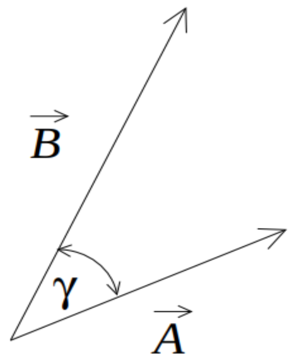
Los vectores unitarios que mas usaremos serán los que denotan las direcciónes en x e y.

6.1.6 Producto Punto o escalar

El producto de dos vectores es un poco mas complicado,

Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores. El producto punto entre ambos vectores corresponde a

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos(\gamma)$$



En donde γ es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Se puede observar que el producto punto entre dos vectores es un número real. Además se puede interpretar como el produco entre el modulo de un vector ($\vec{A}$) y el modulo de la proyección del otro vector ($\vec{B}$) sobre el vector $\vec{A}$.

Si ambos vectores son paralelos, el producto punto es el producto de ambos modulos, en cambio, si son perpendiculares, entonces es cero.

Los productos puntos siguen la propiedad de conmutatividad y distributividad

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= \vec{B}\cdot\vec{A}\\ \vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) &= \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}\end{aligned}$$

Se puede demostrar que $A=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$.

Otra manera de definir el producto punto es el siguiente:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

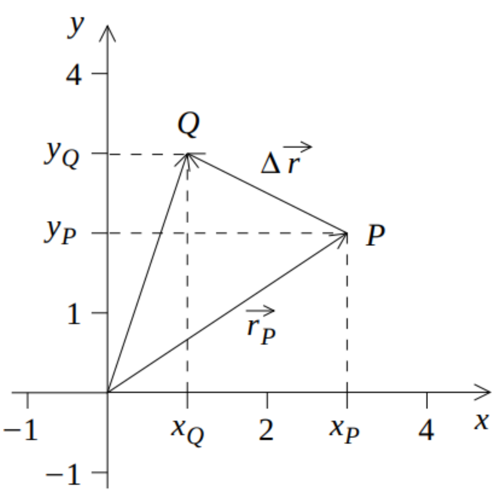
Ejemplo:

Calcule el ángulo entre los vectores $\vec{A}=\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}$ y $\vec{A}=-\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}$

6.2 Cinematica 3D

Ahora que tenemos el conocimiento de vectores, vamos a volver a definir las cantidades que ya habiamos definido en una dimension:

6.2.1 Desplazamiento



Si alguien viaja entre P y Q, el desplazamiento en una dimensión era la posición final menos la posición inicial, en este caso, como es un vector, el vector que une P y Q corresponde a

$$\vec{d} \ = \ \vec{r}_q - \vec{r}_p$$

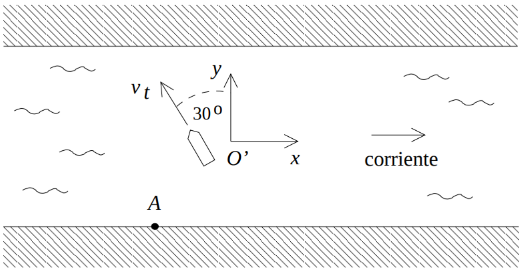
6.2.2 Velocidad Relativa

Supongamos que una partícula A se mueve con velocidad $\vec{v}_A$ y una partícula B se mueve con velocidad $\vec{v}_B$, entonces la velocidad con que A observa como se mueve B es

$$\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

Se dice que $\vec{v}$ es la velocidad relativa de B respecto a A.

Ejemplo:



Suponga que la corriente de un canal tiene una velocidad de 10km/h en dirección Este. Un transbordador navega a una velocidad de 20km/hora en la dirección que aparece en el dibujo con respecto a la corriente. ¿Cuál es la velocidad y dirección del transbordador según el observador situado en la rivera?

Hasta ahora hemos usado solo sistemas de referencia que se encuentran quietos, sin embargo, es posible elejir sistemas de referencias que esten en movimiento con respecto a algún observador externo. La unica condición para poder definir algún sistema de referencia es que no esté acelerando.

Primero definimos el sistema de referencia como se muestra en la figura, en este caso, el sistema de referencia esta con respecto a la corriente, por lo que, visto desde el punto de vista del sistema de referencia O', el punto fijo en la orilla se mueve con velocidad

$$\vec{v}_A^{o'} = -10[\text{km}/h]\,\hat{x}$$

Por otro lado, el enunciado nos dice que el transbordador viaja a una velocidad con respecto a la corriente, por lo que la velocidad del transbordador con respecto a O' es:

$$\vec{v}_t^{o'} = \left(-20\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{x} + 20\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{y}\right)[\text{km}/h] = (-10\hat{x} + 10\sqrt{3}\,\hat{y})[\text{km}/h]$$

Luego, por definición de velocidad relativa:

$$\vec{v}_t^{o'} = \vec{v}_t^{o} - \vec{v}_c^{o}$$

Por lo tanto

$$\vec{v}_t^{o} = \vec{v}_t^{o'} + \vec{v}_c^{o}$$

Reemplazamos y obtenemos

$$\vec{v}_t^o = ((-10\hat{x} + 10\sqrt{3}\,\hat{y}) + 10\hat{x})[\text{km}/h]$$

$$\vec{v}_t^o = 10\sqrt{3}\,\hat{y}[\text{km}/h]$$

Lo que significa que el barco se esta movimiento solo en el eje y desde el punto de vista de la orilla.

6.2.3 Principio de superposición

Asi como el desplazamiento corresponde a un vector, entonces podemos escribir las ecuaciones de itinerario como

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t-t_0)^2 \\
\vec{v}(t) &= \vec{v}_0 + \vec{a}(t-t_0)
\end{aligned}$$

En donde $\vec{r}(t) = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}$ y $\vec{v}(t) = v_x\,\hat{x} + v_y\,\hat{y} + v_z\,\hat{z}$

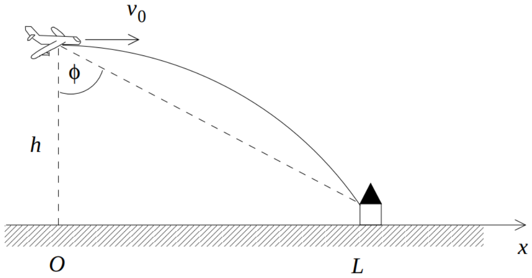
Usando las propiedades de los vectores obtenemos

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x\,t^2 \\
y(t) &= y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y\,t^2 \\
z(t) &= x_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z\,t^2
\end{aligned}$$

Como podemos ver, cada componente espacial puede describirse de manera independiente de las otras coordenadas. Esto corresponde al principio de superposición, que es la capacidad de poder describir cada coordenada como un movimiento independiente, cuyo resultado final es la suma de cada componente. Con este resultado uno puede describir facilmente movimientos parabolicos como el lanzamiento de una bala.

6.2.4 La bala le llegara al cuerpo que cae al mismo tiempo?

6.2.5 Caida Libre



Un bombardero de flores vuela con una velocidad horizontal v_0, constante, y a una altura h en una trayectoria que pasa directamente por sobre su objetivo. ¿A qué ángulo de visión ϕ debe soltar la bomba, de forma que este llegue a su objetivo?.

Antes de comenzar a calcular, como L no es conocido, podemos relacionar el ángulo ϕ con h y L, $\tan(\phi) = L/h.$ Por lo que basta calcular L.

Primero definimos el origen de las coordenadas, que será en O. Luego, identificamos las condiciones iniciales.

En este caso, la flor al momento de salir del avión va con la misma velocidad que el avión, por lo que

$\vec{v}_i = v_0\hat{x}$, y posición inicial corresponde a $\vec{r}_0 = h\,\hat{y}$. Luego, las ecuaciones de itinerario corresponden a :

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \\ y(t) &= h - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

Luego, en un tiempo $t = \tau$, se tiene

$$\begin{aligned} x(\tau) &= L = v_0 \tau \\ y(\tau) &= 0 = h - \frac{1}{2} g \tau^2 \end{aligned}$$

Por lo que $\tau = L/v_0,$ reemplazamos esto en la otra ecuación

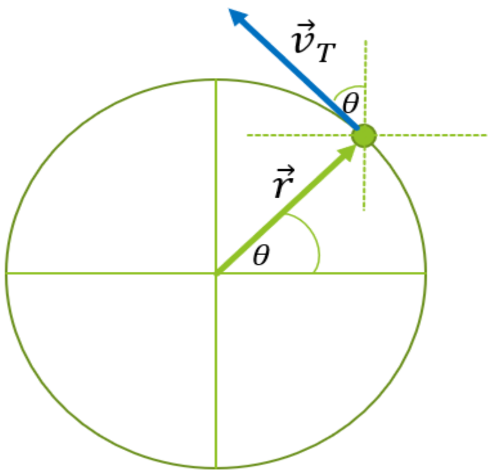
$$L = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Con esto, podemos obtener el valor de ϕ.

Analizar para diferentes velocidades el resultado. v_0 infinito, h infinito?.

6.2.6 Movimiento Circular Uniforme

Otro movimiento que se puede estudiar es el movimiento circular. Tomemos el siguiente circulo de radio r



El movimiento circular uniforme significa que el ángulo cambia de manera constante con el tiempo

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

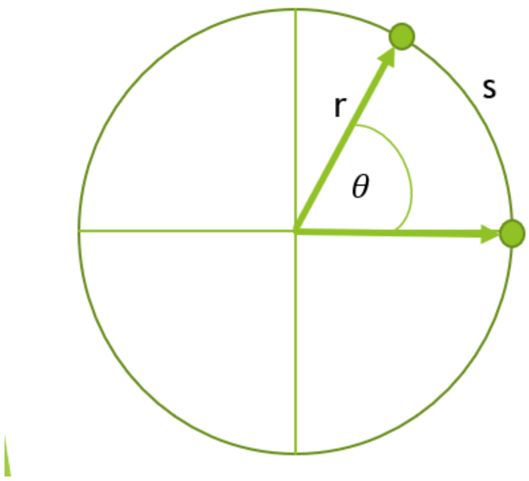
En donde ω es la llamada velocidad angular y sus unidades son radianes/seg. Esta ecuacion es similar a la ecuación de itinerario de la posición. Por otro lado, podemos escribir la posición del punto en función del tiempo

$$\vec{r}(t) = r\cos(\omega t)\hat{x} + r\sin(\omega t)\hat{y}$$

Por otro lado, el punto también tiene una velocidad, esta es llamada la velocidad tangencial y siempre es paralela a la recta tangente que pasa por el punto. En este caso

$$\vec{v_T}(t) = -v_T\sin(\omega t)\hat{x} + v_T\cos(\omega t)\hat{y}$$

Podemos escribir el modulo de la velocidad tangencial en función de la velocidad angular. Para esto, necesitamos el siguiente dibujo:



En el movimiento rectilineo uniforme, la velocidad es la distancia dividido el tiempo, en este caso, la velocidad, que es la tangencial, corresponde a

$$v_T = \frac{s}{t}$$

En donde s es la longitud del arco y t es el tiempo. Podemos escribir la longitud del arco como $s = r\theta$, por lo que

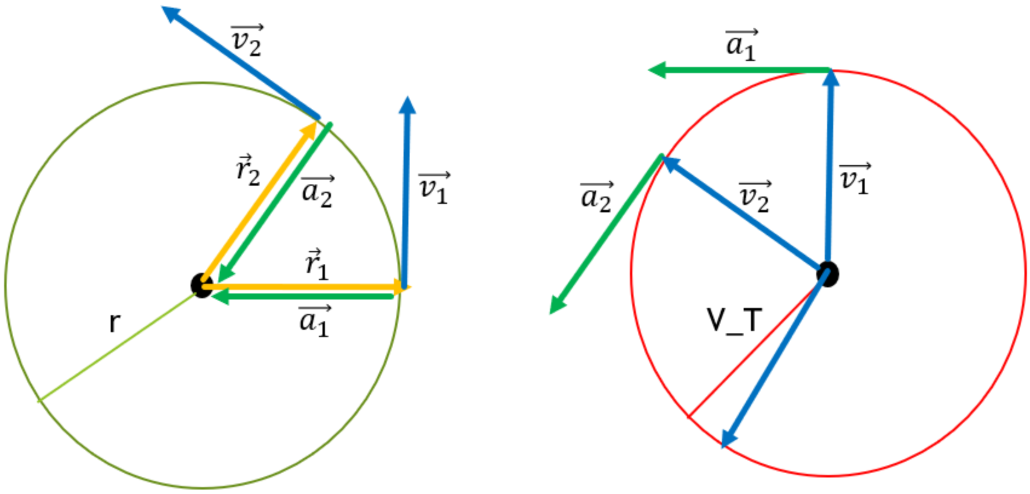
$$v_T = \frac{r\theta}{t}$$

Usando la ecuación de itinerario del ángulo, vemos que $\omega = \frac{\theta}{t}$, por lo tanto

$$v_T = \omega r$$

Otro punto importante es la aceleración centrípeta. Esta aceleración es **necesaria** para que exista el movimiento circular. Un movimiento circular es un movimiento acelerado muy partícular, ya que esta aceleración es necesaria para que haya un movimiento circular, uniforme o acelerado.

Para visualizar y calcular la aceleración centrípeta, usaremos el siguiente dibujo:



Primero que todo, el módulo de la velocidad es siempre constante, solo cambia su dirección. Lo mismo pasa con la aceleración centrípeta en el movimiento circular. Podemos ver que en $\vec{r}_1$, la velocidad tangencial es hacia arriba, en el punto superior la velocidad tangencial irá hacia la izquierda. Si damos una vuelta completa, vemos que la velocidad tangencial tambien forma un círculo y en vez de que exista una velocidad tangencial, corresponde a la aceleración. Si movemos esos vectores al círculo de la posición, podemos darnos cuenta que siempre apunta hacia el centro del círculo. Esa es una descripción cualitativa de la aceleración centrípeta, para poder verlo desde un punto de vista analítico, vamos a calcular la velocidad tangencial y la aceleración tangencial usando el tiempo que les toma en dar una vuelta.

Si el punto da una vuelta completa en un tiempo t, entonces el módulo de la velocidad tangencial corresponde a

$$v_T = \frac{2\pi r}{t}$$

Podemos hacer lo mismo con la aceleración centrípeta:

$$a_c = \frac{2\pi v_T}{t}$$

Si despejamos el tiempo en una ecuación y la reemplazamos en la otra, se obtiene

$$a_c = \frac{v_T^2}{r}$$

En resumen:

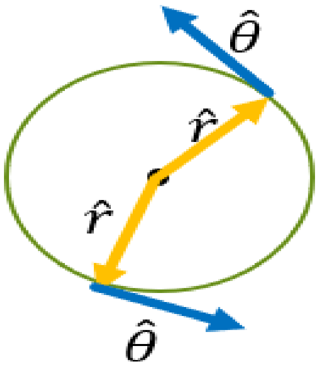
$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \text{Posición de la partícula, desde el origen al borde del círculo} \\
\vec{v}_T &= \text{Velocidad tangencial, siempre tangente al círculo} \\
\vec{a}_c &= \text{Aceleración centrípeta, apunta hacia el centro del círculo} \\
\omega &= \text{Velocidad angular} \\
a_c &= \frac{v_T^2}{r} \\
a_c &= rw^2 \\
v_T &= rw
\end{aligned}$$

6.2.7 Coordenadas Polares en el movimiento circular

Hasta ahora, solo hemos trabajado con coordenadas cartesianas. En coordenadas polares, un vector posición puede escribirse en función del ángulo y el largo del vector. En el caso del movimiento circular, se puede definir como:

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{r} + \theta(t)\hat{\theta}$$

En el círculo, los vectores tongo se pueden ver en la siguiente figura:



el vector $\hat{r}$ es un vector unitario que va desde el origen hasta el borde del circulo y el vector $\hat{\theta}$ es un vector tangente al circulo (Podemos ver que el vector tangente tiene la misma dirección que la velocidad tangencial).

Si escribimos el mismo vector en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= r\cos(\omega t)\hat{x} + r\sin(\omega t)\hat{y} \\ \hat{r}(t) &= \cos(\omega t)\hat{x} + \sin(\omega t)\hat{y} \end{aligned}$$

Y el vector

$$\hat{\theta} = -\sin(\omega t)\hat{x} + \cos(\omega t)\hat{y}$$

A diferencia de los vectores unitarios cartesianos, estos vectores dependen del tiempo, pero su módulo siempre es 1. Ambos vectores $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ son perpendiculares.

En coordenadas polares, lo del movimiento circular se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= R\hat{r} = R\hat{r} \\ \vec{v}_T(t) &= v_T\hat{\theta} = R\omega\hat{\theta} \\ \vec{a}_c(t) &= -a_c\hat{r} = -R\omega^2\hat{r} \end{aligned}$$

6.2.8 Movimiento circular uniformemente acelerado

Cuando existe una aceleración angular (distinta a la aceleración centrípeta), las ecuaciones que describen el movimiento son iguales a las ecuaciones de itinerario.

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega(t) &= \omega_0 + \alpha t \end{aligned}$$

De manera general, la aceleración puede estar compuestas por dos aceleraciones, la centrípeta y otra tangencial.

$$\vec{a} \ = \ \vec{a}_c + \vec{a}_T$$

Al igual que con la velocidad tangencial, se cumple $a_T = \alpha r$.

6.2.9 Otros conceptos

Otros conceptos importantes del movimiento circular.

Periodo: $T = \frac{2\pi}{\omega}$, que indica el tiempo en que el cuerpo demora en dar una vuelta

Frecuencia: $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$, que corresponde al número de vueltas que da un cuerpo por unidad de tiempo, se mide en [Hz].

7 Fuerzas

Hasta este momento, hemos descrito el movimiento en tres, dos y una dimensión, junto con el movimiento circular. En esta unidad, nos dedicaremos a estudiar la causa de este movimiento. Definimos como mecánica clásica a la descripción de la naturaleza basada en las leyes de Newton. Lo primero que hay que mencionar es describir el espacio en el que esta teoría es construida.

7.1 Espacio euclidiano tridimensional

1. Dos puntos cualquiera determinan un segmento de la recta
2. Un segmento de la recta se puede extender indefinidamente en una línea recta
3. Se puede trazar una circunferencia dados un centro y un radio cualquiera
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela

Este espacio es el que estudiaron los griegos y es lo que nos parece natural. Además, el espacio que Newton usa para desarrollar la mecánica no sólo es euclidiano sino que también homogéneo (Que todos los puntos en el espacio son equivalentes) e isótropo (Las propiedades son iguales en todas las direcciones).

7.2 Tiempo

Newton uso la suposición de que: 'El tiempo matemático, absoluto y verdadero fluye, debido a su propia naturaleza, parejamente y en forma independiente a cualquier agente externo'. Esta suposición también parece completamente natural. El hecho de que el tiempo avanza homogénea y continuamente, independiente de la posición de un observador, de su velocidad, de cualquier cosa.

7.3 Leyes de Newton

7.3.1 Primera ley de Newton: Principio de Inercia

Cada cuerpo material persiste en su estado de reposo o movimiento uniforme en linea recta, a menos que una fuerza, que actúa sobre un cuerpo, le obligue a cambiar de estado.

Imaginemos que nos subimos a un auto quieto y vemos un arbol por la ventana. Si el auto comienza a acelerar, desde nuestro sistema de referencia nosotros estamos quietos, en cambio, arbol misteriosamente comienza a acelerar en sentido contrario, alejandose de nosotros, sin que nadie lo empuje. Esto significa que los sistemas de referencias acelerados no cumplen con la primera ley de Newton, ya que genera fuerzas ficticias.

Debido al caso anterior, es necesario que se definan dos tipos de sistemas de referencia. Los que cumplen la primera ley de Newton (sistema de referencia inercial) y los que no la cumplen (sistema de referencia no inercial). Esto significa que la primera ley de Newton es la definición de un sistema de referencia inercial. En este curso, solo trataremos con sistemas de referencia inerciales, sin embargo, es posible extender las leyes de Newton en sistemas no inerciales.

7.3.2 Segunda Ley de Newton

Para poder enunciar esta ley, es necesario definir un nuevo concepto: La cantidad de movimiento, momentum, momento o momento lineal de una partícula. Este está definido como

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

En donde m es la masa y $\vec{v}$ es la velocidad. En este punto, la masa no esta definida, por lo que diremos que es una magnitud asociada a un cuerpo proporcional a su peso.

Con esta definición, podemos enunciar la segunda ley de Newton.

Segunda Ley: El cambio de momentum $\Delta\vec{p}$ de una partícula es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo, como también al intervalo Δt durante el cual se aplica, y apunta en la dirección y sentido de esta fuerza, o sea,

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}$$

Esta ecuación define el concepto de fuerza. Si tomamos la definición del momentum y la masa es constante, se tiene el caso especial

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Las unidades de la fuerza son el Newton [N]

7.3.3 Tercera Ley de Newton

Si un cuerpo A ejerce una fuerza sobre otro B, entonces este último ejercerá sobre A una fuerza de igual magnitud y en la misma dirección, pero en sentido opuesto. Esta ley se conoce como la Ley de acción y reacción. Asi como nosotros somos atraidos por la tierra, nosotros también la atraemos. Pero al ser tan masiva, la fuerza no es perceptible. Un punto importante es que estas fuerzas no actúan en el mismo cuerpo, si empujo una pared, la pared siente la fuerza y nosotros la reacción a esa fuerza.

7.4 Uso de las leyes de Newton

Las diferentes fuerzas son aditivas, por lo que la suma de todas las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo (Fuerza neta) es proporcional a la aceleración del cuerpo.

$$\overrightarrow{F_N} = \sum \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Si la suma de todas las fuerza es igual a cero, entonces la aceleración es cero, por lo que se puede decir que el cuerpo esta en reposo o en un movimiento con velocidad constante.

Ahora veremos algunas de las fuerzas mas importantes que se encuentran en la naturaleza.

7.4.1 Fuerza de gravitación universal

Esta fuerza se refiere a la atracción que sienten dos masas distintas, como por ejemplo, la tierra y el sol y fue descubierta por Newton en 1687. Esta tiene la siguiente forma,

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}_{21} = \ -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}_{21}$$

corresponde a la fuerza que siente el cuerpo 1 debido al cuerpo 2, además, $\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, G es la constante de gravitación universal, m_1 y m_2 la masa de ambos cuerpos y r la distancia entre ambos cuerpos.

Veamos la fuerza que siente un rinoceronte de masa M_r, sabiendo que el radio de la tierra $R_T = 6.371\text{x}10^6[m]$, la masa de la tierra $M_T = 5.972\text{x}10^{24}[\text{kg}]$ y una constante de gravitación universal $G = 6.637\text{x}10^{-11}\left[\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}\right]$. Reemplazando en la fuerza, se obtiene

$$\vec{F} = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right]M_r(-\hat{y})$$

Si consideramos cualquier otro cuerpo, una mesa, un libro, lo único que cambia de la fuerza es la masa. Esto significa que cualquier cuerpo sobre la tierra, siente una fuerza proporcional a su masa y al vector

$$\vec{g} = -9.81\left[\frac{m}{s^2}\right]\hat{y}$$

Por lo tanto, a esta fuerza la llamamos fuerza peso y tiene la forma,

$$\vec{W} = m\vec{g}$$

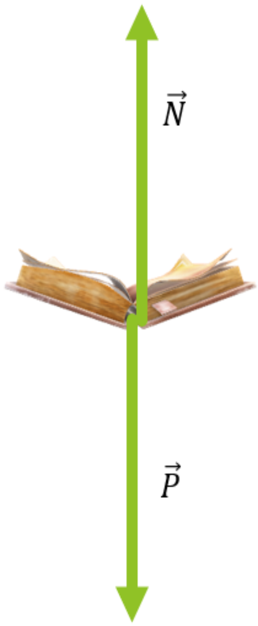
En principio, $\vec{g}$ tiene una magnitud constante, pero como la tierra no es totalmente esférica, puede variar dependiendo de en que parte se encuentre. Un punto importante, es que el peso es la fuerza que ejerce la tierra sobre el cuerpo.

7.4.2 Fuerza Normal

Analicemos las fuerzas que existen en un libro que se encuentra sobre una mesa. Sabemos que por el hecho de estar sobre la tierra, este siente una fuerza $\vec{W} = m\vec{g}$. Que mantiene al libro en equilibrio, sin que acelere?.

Antes de eso, necesitamos definir lo que es un diagrama de cuerpo libre. Cada interacción de otros cuerpos sobre un objeto (en este caso, el libro) puede ser sustituido aislando el cuerpo y viendo cuales son las fuerzas que se ejercen sobre este cuerpo. Al igual que la posición y la velocidad, cumplen el principio de superposición, por lo que se puede separar las fuerzas en el eje x e y.

En el caso del libro sobre la mesa, existe alguna fuerza, que es ejercida por la mesa sobre el libro, el DLC del libro es el siguiente,



Cuya fuerza $\vec{N}$ es la fuerza que ejerce la mesa sobre el libro. Por otro lado, sabemos que el libro no esta acelerando, por lo que, usando la segunda ley de Newton

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_N &= \vec{N} + \vec{W} = 0 \\
\vec{N} &= -\vec{W}
\end{aligned}
$$

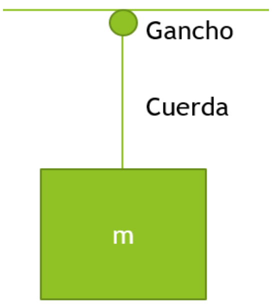
En este caso, la normal tiene el mismo módulo y dirección opuesta al peso. En general, esta fuerza normal es la que ejerce cualquier superficie en el que se posa algún cuerpo. Siempre es perpendicular a la superficie. Esta fuerza, es la responsable de que los cuerpos no atraviesen otros cuerpos, en este caso, la normal es la responsable de que el libro no atraviese la mesa.

La normal no es la reacción a la fuerza peso, la normal es una fuerza que ejerce la mesa sobre el libro, la reacción a esa es una fuerza de igual magnitud que la fuerza normal, que ejerce el libro sobre la mesa. Es importante mencionar que la fuerza normal la siente el libro y la fuerza reacción la siente la mesa. Dos objetos distintos.

Ver Fuerzas en plano inclinado.

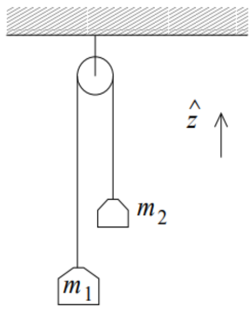
7.4.3 Fuerza Tensión

Para estudiar la fuerza tensión, tomaremos una cuerda ideal, que significa que no tiene masa, no es extensible y además es perfectamente flexible. Consideremos un objeto de masa m que cuelga del techo sujetado por una cuerda ideal.



Sabemos que por estar sobre la tierra, la masa siente una fuerza peso $\vec{W}$. Para que el cuerpo este en equilibrio, es necesario que exista otra fuerza que contrarreste la fuerza peso, de tal manera que la suma de todas las fuerzas sea cero. Esta fuerza es la llamada tensión y tiene la misma magnitud en toda la cuerda. En este caso, la fuerza tension $T = -\mathrm{mg}$.

7.4.4 Máquina de Atwood



Consideremos dos masas, m_1 y m_2, unidas por una cuerda ideal sin masa que pasa sobre una polea ideal. Deseamos encontrar la aceleración de las masas y las tensiones de las cuerdas.

Con la expresión polea ideal, nos estamos refiriendo a una polea que no tiene masa y gira sin roce. El objetivo de la polea es simplemente cambiar la dirección de la cuerda y, por lo tanto, de la tensión. La magnitud de la tensión sigue siendo la misma a lo largo de toda la cuerda.

Las ecuaciones de fuerza son las siguientes,

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= T - m_1 g \\ m_2 a_2 &= T - m_2 g \end{aligned}$$

En este punto, tenemos tres incognitas, a_1, a_2, T y dos ecuaciónes. Necesitamos una ecuación mas para resolver el problema. Para esto, pensemos en que pasa si la masa m_1 se mueve Δz en un tiempo Δt. Debido a que la cuerda es inextensible, entonces la masa m_2 se mueve $-\Delta z$, en la misma cantidad de tiempo. Lo mismo pasa con la velocidad, si la velocidad de m_1 es hacia abajo, la masa m_2 debe tener la misma magnitud pero en sentido contrario. Misma analogía para la aceleración, por lo tanto

$$a_1 = -a_2$$

Esta es la tercera ecuación que buscamos, si reemplazamos este valor en las ecuaciones de fuerza, obtenemos

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= T - m_1 g \\ -m_2 a_1 &= T - m_2 g \end{aligned}$$

Restamos ambas ecuaciones

$$a_1(m_1 + m_2) = (m_2 - m_1) g$$

Despejamos a_1 y ademas reemplazamos para encontrar T

$$\begin{aligned} a_1 &= -g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \\ T &= 2g\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Algunos casos especiales:

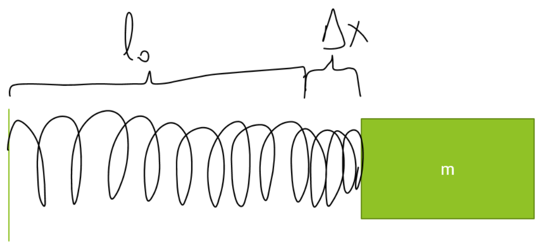
1. Si $m_1 = m_2$, la aceleración es cero. Esto es esperable ya que si ambas masas son iguales, ninguna acelera.

2. $m_1 > m_2$, entonces a_1 es menor que cero, esto significa que la masa 1 baja y la masa 2 sube, que tiene sentido.

3. Si $m_1 = 0$, entonces $T = 0$, significa que no hay tension.

7.4.5 Fuerza Elástica

Es la fuerza que ejerce un resorte cuando está estirado o contraido. Esta fuerza es cero cuando se encuentra en la posición de equilibro.



Si tenemos una masa m junto a un resorte, la fuerza que ejerce este sobre la masa m es,

$$\vec{F}_h = -k(\vec{r} - \vec{r}_0) = -k\Delta\vec{r}$$

Para el caso del dibujo, si consideramos solo un estiramiento en el eje x, se obtiene

$$F_x = -k(x - l_0) = -k\Delta x$$

7.4.6 Fuerza Centrípeta

Consideremos una masa m que gira en el plano xy, en un círculo de radio R y con una velocidad angular constante, w_0. Para que esto suceda, la aceleración del cuerpo TIENE que ser la aceleración centrípeta. Por lo tanto, la fuerza neta o la suma de todas las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo tiene que ser,

$$\begin{aligned} \vec{F}_c &= -m a_c \hat{r} \\ &= -m\frac{v_T^2}{R}\hat{r} \end{aligned}$$

Si existe una aceleración tangencial, entonces la suma de todas las fuerzas en el eje radial tiene que ser la fuerza centrípeta.

7.4.7 Fuerza de roce

La fuerza de roce es la fuerza que se opone al movimiento. En este curso, estudiaremos dos tipos de fuerzas de roce, el roce cinético y el estático. El roce cinético es la fuerza que se opone al movimineto relativo entre dos cuerpos, mientras que el roce estático es la fuerza que impide que el movimiento comience. Además de estos dos existe el roce viscoso, el rodante, etc.

La fuerza de roce estático tiene una particularidad, ya que si la fuerza que se aplica no es lo suficientemente grande como para vencer la fuerza de roce estático, el objeto no se mueve. Sin embargo, si esta fuerza supera un umbral, que llamaremos la fuerza de roce estático máximo, entonces el objeto comenzará a moverse, no sintiendo mas la fuerza de roce estático.

Cuando el cuerpo ya está en movimiento, aparece una fuerza que se opone al movimiento y es constante, esta es la fuerza de roce cinético. Diferentes resultados empíricos muestran las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned} F_c &= \mu_c N \\ F_e^{\max} &= \mu_e N \end{aligned}$$

La dirección de esta fuerza siempre es opuesta al movimiento, N es el módulo de la normal y μ es el coeficiente de roce estático o cinético. Se cumple que $\mu_c < \mu_e$, esto implica que se necesita mas fuerza para comenzar a mover un cuerpo que mantener un cuerpo en movimiento.

7.5 Energía

Hasta este punto, para describir un movimiento de una partícula es necesario conocer la posición, velocidad y aceleración inicial para poder predecir que pasará en el futuro en sistemas uniformemente acelerados. Además, el tiempo juego un rol importante en el uso de la cinemática. Luego, mediante las leyes de Newton, describimos los origenes de estas aceleraciones, que corresponden a las fuerzas. Hasta ahora la descripción se usó usando vectores. En esta unidad, veremos una manera mas simple de poder describir el movimiento de una partícula usando solo escalares, la llamada energía.

Consideremos una partícula de masa m, restringida a moverse a lo largo del eje $\hat{x}$, siendo la posicion y la velocidad dependientes del tiempo, $x(t), v(t)$. Supongamos que se le aplica una fuerza $F(x)$ hacia la derecha que puede depender de la posición.

Tomemos los siguientes casos,

- **En este punto, definiremos como es la energía cinética y el trabajo.** Si la fuerza es constante, $F(x) = F_0$, entonces la aceleración del cuerpo de masa m es $a = F_0/m$. Supongamos que un tiempo t_i, la posición de la partícula es $x(t_i)$ y su velocidad $v(t_i)$. Luego, en un tiempo t_f, para encontrar la posición es necesario usar la ecuación de itinerario, entonces

$$\begin{aligned} x(t_f) &= x(t_i) + v(t_i)(t_f - t_i) + \frac{1}{2}a(t_f - t_i)^2 (\text{Aca elejimos}\, t_0 = t_f) \\ x(t_f) &= x(t_i) + v(t_i)\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2 (\Delta t = t_f - t_i \end{aligned}$$

  Por lo tanto, el desplazamiento del cuerpo viene dado por,

$$\Delta x = x(t_f) - x(t_i) = v(t_i)\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2$$

  Para la velocidad podemos hacer lo mismo, Pasando el término $v(t_i)$ hacia la izquierda, podemos obtener la diferencia de velocidades en esos tiempos

$$\Delta v = v(t_f) - v(t_i) \;=\; a\Delta t(\Delta t = t_f - t_i)$$

De todo lo anterior, tenemos dos ecuaciones,

$$\begin{aligned}
\Delta v &= a\Delta t \\
\Delta x &= v(t_i)\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2
\end{aligned}$$

Multiplicando la segunda por la fuerza, las dos ecuaciones quedan

$$\begin{aligned}
\Delta v &= a\Delta t \\
F_0\Delta x &= F_0 v(t_i)\Delta t + \frac{F_0}{2}a\Delta t^2
\end{aligned}$$

De la primera ecuación, despejamos Δt y la reemplazamos en la segunda

$$F_0\Delta x \;=\; F_0 v(t_i)\frac{\Delta v}{a} + \frac{F_0}{2}a\frac{\Delta v^2}{a^2}$$

Pero $F_0 = ma$, entonces

$$\begin{aligned}
F_0\Delta x &= m a v(t_i)\frac{\Delta v}{a} + \frac{m a}{2}a\frac{\Delta v^2}{a^2} \\
F_0\Delta x &= m\, v(t_i)\Delta v + \frac{m}{2}\Delta v^2
\end{aligned}$$

Pero $\Delta v = v(t_f) - v(t_i)$, entonces

$$\begin{aligned}
F_0\Delta x &= m\, v(t_i)(v(t_f) - v(t_i)) + \frac{m}{2}(v(t_f) - v(t_i))^2 \\
F_0\Delta x &= m\, v(t_i)v(t_f) - m\, v(t_i)v(t_i)) + \frac{m}{2}v(t_f)^2 + \frac{m}{2}v(t_i)^2 - m v t_f t_i \\
F_0\Delta x &= -m\, v(t_i)^2 + \frac{m}{2}v(t_f)^2 + \frac{m}{2}v(t_i)^2 \\
F_0\Delta x &= \frac{m}{2}v(t_f)^2 - \frac{m}{2}v(t_i)^2
\end{aligned}$$

Como la fuerza es constante, esta ecuación es valida para todo instante de tiempo. Con respecto a este resultado, podemos decir muchas cosas. Por ejemplo, si escojemos dos puntos albitrarios del eje x, por ejemplo $x_f - x_i$, y además conocemos la fuerza, la cantidad $F_0\Delta x$ será igual a una cantidad que corresponde a una misma función ($\frac{1}{2}mv^2$), en este caso la velocidad, evaluadas en esos dos puntos. Esto significa que usted le basta tomar el principio y el final de una trayectoria que pueden estar arbitrariamente separados en el tiempo y podemos predecir su velocidad en el punto final.

La función que esta en la parte derecha de la ecuación ($\frac{1}{2}mv^2$) es lo que comunmente se llama **energía cinética**. Generalmente se denota con la letra T o K. Por otra parte, el término de la izquierda ($F_0\Delta x$), la fuerza por el desplazamiento, es lo que se denomina trabajo y se le denota usualmente con la W. Esto significa, que la ecuación puede escribirse como

$$W_{x_f \to x_i} \;=\; K_f - K_i$$

En palabras, ejercer un trabajo sobre un sistema se traduce en un cambio en su energía cinética. Las unidades son el Joule (J=Nm).

- Supongamos ahora que la fuerza no es constante, entonces dividiremos la trayectoria de la partícula en N intervalos ancho Δx, cuyos anchos son lo suficientemente pequeños para que la fuerza en ese intervalo sea constante. Denotemos las distintas posiciones por $x_1, x_2, \ldots, x_n$, x_{n+1} siendo $x_i = x_1$ y $x_f = x_{n+1}$. Usando el resultado anterior, podemos calcular el trabajo que se realiza entre dos distintas posiciones,

$$W_{x_j \to x_{j+1}} = F(x_j)\Delta x \ = \ K_{j+1} - K_j$$

Si sumamos todos los trabajos de cada intervalo, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} F(x_j)\Delta x &= (K_2 - K_1) + (K_3 - K_2) + \cdots + (K_{N+1} - K_N) \\ W_{x_f \to x_i} &= K_f - K_i \end{aligned}$$

Esto significa que incluso aunque la fuerza varíe en el tiempo, el trabajo siempre será la energía cinética en el punto final menos la energía cinética en el punto inicial.

- **Potencial gravitatoria**: Supongamos que la partícula esta en un campo gravitatorio $\vec{g}$. Levantemos la partícula desde una altura z_i hasta una altura z_f, partiendo desde el reposo y volviendola a dejar en reposo. Aplicamos una fuerza de manera que esta suba con una velocidad constante. Mientras la partícula va subiendo, su aceleración es nula. De lo anterior, desprendemos que la fuerza que debemos aplicar es $F(z) = mg$. Segun el cálculo anterior, el trabajo que ejerce la fuerza viene dado por $F_0\Delta z = W_{z_f \to z_i} = mg\Delta z$. En este caso, vemos lo mismo que la energía cinética, el trabajo necesario para levantar un objeto es igual a una función (mgz) evaluada en dos diferentes puntos. Podemos decir que esta función también es una energía, pero es de caracter distinto que la energía cinética, ya que su velocidad se mantuvo constante. Sin embargo, es claro que algo ha cambiado de la partícula, por que despues de aplicada la fuerza, se encuentra mas arriba. A esta energía se le llamará energía potencial, ya que no se manifiesta directamente como la velocidad, pero por ejemplo, si esta es colocada en un sistema de poleas, entonces comenzará a inyectar energía al sistema moviendo otros cuerpos del sistema.

  Al igual que la energía cinética, esta energía, la potencial gravitatoria, puede expresarse como

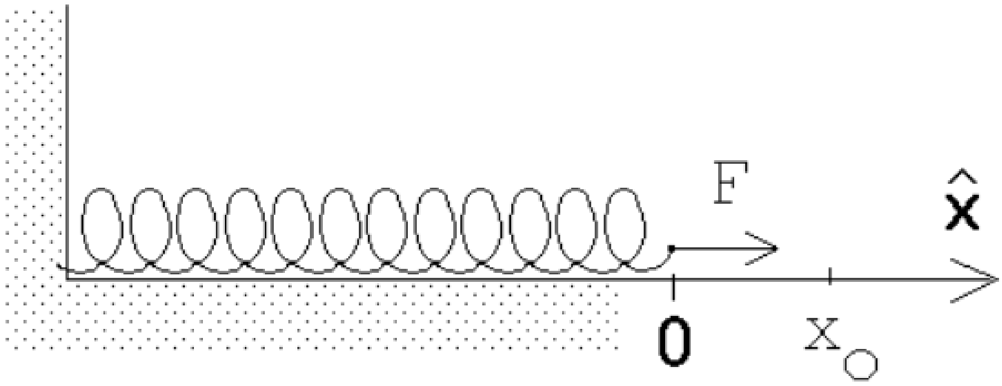
$$W_{z_i \to z_f} \ = \ U(z_f) - U(z_i)$$

  En donde U es la energía potencial gravitatoria. En general, esta energía puede escribirse como

$$U(z) \ = \ U_0 + mgz$$

  con U_0 cierta constante albitraria, que diremos donde la energía potencial es nula. Como el trabajo es la resta de la energía potencial gravitatoria en dos puntos, la constante no aporta nada. Esto no se hizo en la energía cinética, ya que tiene sentido decir que el sistema cuando esta en reposo no tiene energía cinética. En este caso, no hay nada que nos diga que cuando $z = 0$ la energía potencial es cero. Por ejemplo, si hay un hoyo y un cuerpo cae, al igual que cuando levantamos un cuerpo, lo soltamos y comienza a ganar velocidad, el cuerpo ganará velocidad, aunque estuviera con energía potencial cero. Debido a esto, al igual que con cinemática, es necesario definir un sistema de referencia para la energía potencial, por ejemplo, decir que $U_0 = 0$, cuando $z = 0$. También puede colocarlo donde usted quiera, pero hay que ser consistente con ese sistema de referencia. Las energías potenciales suelen llamarse así por que si uno las suelta, el sistema comenzará a ganar energía cinética.

- **Potencial Elastica:** Consideremos un resorte de constante de restitución k, acostado sobre una superficie horizontal sin roce y con un extremo empotrado en una pared.



Supongamos además que el sistema inicialmente se encuentra en reposo, con el resorte teniendo su largo natural. Evaluemos el trabajo que tenemos que realizar para alargar (lentamente) el resorte en una magnitud x_0. La fuerza que ejerce el resorte no es constante y cambia a medida que se estira. En términos matemáticos es,

$$\vec{F}(x) \;=\; kx\,\hat{x}$$

Para demostrar la energía asociada a un resorte es necesario integrar, por lo que diremos que

$$W_{x_i \to x_f} \;=\; \frac{1}{2}mx_f^2 - \frac{1}{2}mx_i^2$$

Esta energía también es potencial, y es llamada energía potencial elástica. Esta energía es potencial ya que si el cuerpo se suelta, este comenzará a ganar energía cinética, al igual que la potencial gravitatoria. En este caso, U_0 podemos tomarlo cero, por que existe un punto en el que el cuerpo no siente nada, que es cuando se está en el punto de equilibrio.

- **Roce:** Consideremos una partícula que se mueve a lo largo de una recta y supongamos que existe una fuerza de roce que actúa sobre el sistema. Cuando la mesa esta horizontal, la fuerza de roce $f_r = \mu_c mg$ (Esto solo aparece cuando se esta moviendo). Esta fuerza la siente la masa m en dirección opuesta al movimiento, esto significa que para poder mover el cuerpo con velocidad constante, es necesario aplicar el mismo módulo de la fuerza pero en dirección contraria. Si calculamos el trabajo realizado por la fuerza externa, se tiene

  $$W_{x_i \to x_f} \;=\; \mu_c mg(x_f - x_i)$$

  Al igual que la energía potencial gravitatoria, el trabajo es una función lineal evaluada en dos puntos distintos, sin embargo, funciona distinto a la energía potencial. Si la energía potencial gravitatoria y elastica promueven el movimiento luego de dejarlos solos, la fuerza de roce produce lo contrario, por ejemplo, si un cuerpo va con velocidad constante, luego de un tiempo este frenará. De por si, debido a esto, no se le puede llamar energía potencial, tampoco cinética ya que no está asociada a la velocidad. Otro punto importante es que depende del punto inicial y final y además del cámino tomado. Por ejemplo, supongamos que x_f esta a la derecha de x_i. El trabajo necesario para llevar la partícula de x_f a x_i es $W_{x_f \to x_i} \;=\; \mu_c mg(x_f - x_i)$ .Pero si antes lo empujamos hacia la izquierda en una distancia L y recien desde ahí empujamos al punto final x_f, el trabajo sería $W = mg\mu_c(2L + x_f - x_i)$. (ojo, el ejemplo anterior es ligeramente distinto al que nosotros hicimos en clase, por eso el signo de x_f esta cambiado) Esto significa que el trabajo no solo depende del punto final e inicial, sino que del camino.

Otra importante diferencia es que el trabajo que nosotros le aplicamos al cuerpo no es recuperable de alguna otra forma, por ejemplo en la gravitatoria, si nosotros hacemos un trabajo en llevarla de un punto a otro y la soltamos, esta energía que gano se convertirá en energía cinética. En cambio, con la fuerza de roce, si se hace trabajo para acelerar el cuerpo y luego la soltamos, esta comenzará a desacelerar hasta quedar en reposo. ¿Qué paso con esta energía que le entramos al sistema?.

- En resumen, para movimientos unidimensionales tenemos,

  1. El trabajo realizado por una fuerza $F(x)$ que actúa sobre alguna partícula

     $$W_{x_f \to x_i} = \sum_j F(x)(x_{j+1} - x_j)$$

     El trabajo W que se entrega al sistema, cuando no hay roce, se manifiesta en un cambio de energías.

  2. Energía cinética de una partícula de masa m

     $$K = \frac{1}{2}mv^2$$

     y se manifiesta en el movimiento de una partícula. Cuando esta partícula está en reposo, su energía cinética es cero.

  3. Energía potencial gravitatoria,

     $$U(z) = U_0 + mgz$$

  4. Energía potencial elástica,

     $$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

     En donde x es la compresión o estiramiento del resorte.

7.5.1 Conservación de la energía

Al entregarle a una partícula un trabajo W, entonces puede pasar

$$W = (K_f - K_i) + (U_f - U_i) + Q$$

Esto significa que el trabajo se convierte en energía cinética, energía potencial y energía disipada por calor (fuerza de roce, si es que hay). Esta ecuación es la llamada ecuación de conservación de energía. La energía no se crea ni se destruye, solo se transforma. Podemos definir,

$$E = K + U$$

Esta es la llamada energía mecánica, por lo que anterior puede escribirse como

$$E_f = W + E_i - Q$$

En palabras, esto significa que la energía final es la energía inicial mas la energía que se le entrega en forma de trabajo, menos el calor disipado por la fuerza de roce. Si estamos en el caso en que no hay fuerzas externas al sistema, podemos decir que $W=0$ y no hay fuerza de roce, entonces

$$E_f \;=\; E_i$$

Esto significa que, en auscencia de fuerzas externas, entonces la energía mecánica se conserva. Es importante saber identificar si el sistema esta libre de fuerzas externas.

Calcular caida libre.

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}mv^2 \\ v &= \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

7.5.2 Trabajo para un movimiento en tres dimensiones

El trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}(\vec{r})$, que actúa sobre alguna partícula viene dado por

$$W \;=\; \int \vec{F}(\vec{r})\cdot d\,\vec{r}$$

Si consideramos que la fuerza es constante, entonces

$$W = \;\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

En donde $\Delta\vec{r}$ es el desplazamiento.

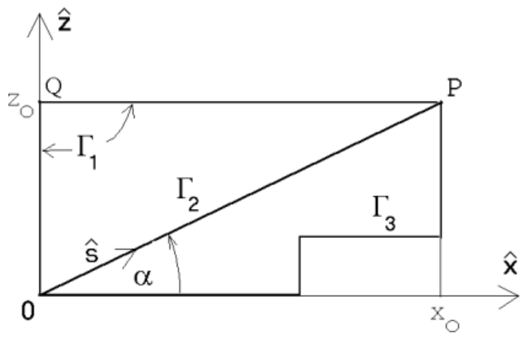
Al igual que en el caso unidimensional, si se tiene una partícula en el espacio y se le aplica una fuerza, entonces,

$$W=\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2$$

Y si la fuerza es constante, entonces

$$\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}= \;\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2$$

Calculemos ahora el trabajo necesario para llevarlo desde el punto inicial hasta el punto final en un campo gravitatorio a velocidad constante.



El objeto tiene masa m y se mueve desde el punto O hasta P.

Es necesario notar que para ir desde el punto P, se puede ir por muchos caminos distintos. Veamos que pasa por el camino Γ_1, esto significa el trabajo que necesitamos para llevar desde 0 hasta P por Γ_1 es la suma desde 0 a Q con Q y P. La fuerza necesaria para poder llevarle desde 0 a z_0 es $\vec{F}=mg\,\hat{z}$, luego el desplazamiento es $\Delta\vec{r}=z_0\hat{z}$. Por lo tanto, para el primer tramo tenemos,

$$W \;=\; mgz_0$$

Para el tramo QP, la fuerza es la misma, pero el desplazamiento es $\Delta\vec{r} = x_0\hat{x}$. Como la fuerza y el desplazamiento son perpendiculares, entonces W=0. Por lo que el trabajo necesario para llevar una partícula m desde O hasta P es $W = mgz_0$.

Veamos que pasa con el camino Γ_2. La fuerza sigue siendo la misma, pero el desplazamiento es $\Delta\vec{r} = x_0\hat{x} + z_0\hat{z}$, luego, el trabajo corresponde a,

$$\begin{aligned} W &= \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} \\ &= (mg\,\hat{z})\cdot(x_0\hat{x} + z_0\hat{z}) \\ &= mgz_0 \end{aligned}$$

Como podemos ver, el trabajo realizado por el camino Γ_2 es el mismo que en el de Γ_1. Un punto importante es que en este caso, la fuerza es solo en el eje z, por lo que los desplazamiento en el eje x no generan trabajo. A raiz de lo anterior, podemos ver que $W = mg\,(z - 0)$, que es lo mismo que pasaba en el caso unidimensional,

$$U = mgz + U_0$$

Con U_0 una constante que depende de donde se coloque el 0 de la energía potencial gravitatoria.

Si se cumple que el trabajo necesario para llevar una partícula entre dos puntos es independiente del camino, significa que estamos frente a un campo de fuerzas conservativo (en nuestro caso, el campo de fuerzas es la gravedad). Y gracias a que la fuerza de gravedad es conservativa, se puede definir una energía potencial asociada a esa fuerza.

Una fuerza no conservativa, como ejemplo, es la fuerza de roce, ya que el trabajo depende del camino.

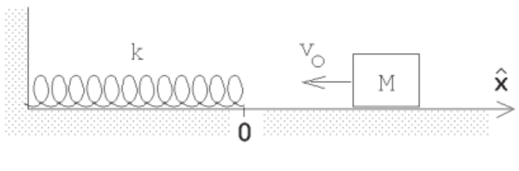
7.5.3 Potencia

Al trabajo por unidad de tiempo se le denomina potencia. En el sistema SI, la unidad de potencia se denomina Watt[W],

$$1[W] = 1\,\frac{J}{s}$$

7.5.4 Ejemplos:

Ejemplo 1:



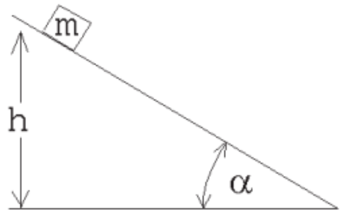
Considere un bloque de masa M que incide con una velocidad v_0 sobre un resorte. Cuál será la máxima compresión que en algún instante llega a tener el resorte?

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

En donde x es la compresión, que es

$$x = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0$$

Ejemplo 2:



Un bloque de masa m resbala de un plano inclinado, partiendo del reposo desde una altura h. Sea α el ángulo de elevación y μ el coeficiente de roce cinématico entre el bloque y el plano. Con qué velocidad llegará el bloque al pie del plano inclinado?.

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgh - \mu mg\cos(\alpha)L$$

7.6 SISTEMAS DE N PARTICULAS

Primero, definidiremos las leyes de Newton para N partículas. Consideremos N partículas, cuyas masas y vectores de posición vienen dados por m_j y $\vec{r_j}$, con $j = 1, 2, 3, \ldots, N$. Supongamos que sobre cada partícula j algún agente externo ejerce una fuerza $\vec{F_j}$. Supongamos además que las partículas interactúan entre sí, siendo $\vec{f}_{\mathrm{ij}}$ la fuerza que ejerce la partícula i sobre la partícula j. Hay que considerar que también hay una fuerza de reacción de mismo módulo y dirección contraria que ejerce j sobre i. Usemos las leyes de Newton para una partícula j.

$$\vec{F_j} + \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_{ji} = m_j\vec{a}_j$$

En el lado izquierdo se tiene la fuerza externa F mas las fuerzas que ejercen todas las partículas i sobre j. Ahora sumemos las ecuaciones de Newton para todas las partículas, obtenemos

$$\sum_{j}^{N} \vec{F_j} + \sum_{i,j}^{N} \vec{f}_{ji} = \sum_{j}^{N} m_j\vec{a}_j$$

Debido a la acción y reacción, $\sum_{i,j}^{N} \vec{f}_{ji} = 0$. Esto significa que

$$\sum_{j}^{N} \vec{F_j} = \sum_{j}^{N} m_j\vec{a}_j$$

Que escrito en otras palabras, que las fuerzas internas se anulan. Definamos el siguiente vector

$$\vec{r}_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j\vec{r}_j$$

En donde $M = m_1 + m_2 + \cdots + m_N$. Mismo trabajo se puede realizar con la velocidad y la aceleración

$$\vec{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_N\vec{v}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j\vec{v}_j$$

$$\vec{a}_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \cdots + m_N\vec{a}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j\vec{a}_j$$

Si reemplazamos la ecuación de $\vec{a}_{\rm cm}$ en la ecuación obtenida de las leyes de Newton, se tiene

$$\begin{aligned}\sum_j^N \vec{F}_j &= \sum_j^N m_j \vec{a}_j \\ \sum_j^N \vec{F}_j &= M\vec{a}_{\rm cm}\end{aligned}$$

Además, podemos decir que $\sum_j^N \vec{F}_j$ es la fuerza externa total que actúa sobre las partículas, que denotaremos

$$\vec{F}_{\rm tot} = M\vec{a}_{\rm cm}$$

Como vemos, la ley de Newton que obtuvimos para un sistema de N partículas no depende de las fuerzas con las que interactúan las partículas internamente. El vector $\vec{r}_{\rm cm}$ ($\vec{v}_{\rm cm}, \vec{a}_{\rm cm}$)se le denomina la posición (velocidad, aceleración)del centro de masas. La ecuación obtenida anteriormente nos dice que la suma de las fuerzas externas que interactuan en un sistema de N partículas hace acelerar al centro de masas, como si toda la masa del sistema de partículas estuviera centrada ahí. Esta es la razón por la que, toda la física mostrada anteriormente puede ser representada como un punto de masa M.

Si la fuerza externa total sobre el sistema es nula $\vec{F}_{\rm tot} = 0$, entonces el centro de masas no acelera. En ese caso, la velocidad del centro de masas es constante.

7.6.1 Momento Lineal

Considerando el sistema anterior de N partículas, definamos el momento lineal de la partícula j de masa m y velocidad $\vec{v}_j$, $\vec{p}_j = m\,\vec{v}_j$. Así como definimos la velocidad del centro de masas, también podemos definir el momentum del centro de masas,

$$\vec{P}_{\rm tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N = M\,\vec{v}_{\rm cm}$$

Es decir, el momentum total del sistema es la suma de los momentum de cada partícula en el sistema. Volviendo a lo anterior, si no hay fuerzas externas, se tiene

$$\vec{F}_{\rm tot} = M\vec{a}_{\rm cm}$$

En este punto, tendremos que mencionar la derivada de una función. De una manera muy simplificada, la derivada de una función es su pendiente en cada punto (mostrar derivadas mas simples). Usando la defición de momentum, podemos derivarlo,

$$\frac{d\,\vec{p}_T}{dt} = m\frac{d\,\vec{v}_{\rm cm}}{dt} = m\,\vec{a}_{\rm cm} = \vec{F}_{\rm tot}$$

De lo anterior, podemos ver que

$$\frac{d\,\vec{p}_T}{dt} = \vec{F}_{\rm tot}$$

Si las fuerzas externas son cero, entonces

$$\frac{d\,\vec{p}_T}{dt} = 0$$

Esto significa que $\vec{p}_T$ para cada instante de tiempo tiene que ser una constante, lo que significa

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

Esto es lo que se conoce como principio de conservación del momento lineal. En palabras, signfica que cuando la fuerza externa total es cero, la suma de los momentos lineales de las distintas partículas se mantiene constante en el tiempo. Este principío es muy similar al de conservación de la energía. Vemos también que la fuerza individual sobre cada partícula no tiene por que ser cero en general, por lo tanto cambiarán su velocidad y por lo tanto su momento lineal. Sin embargo, si la fuerza externa es cero, entonces la suma de cada momento lineal no varía en el tiempo.

Ejercicio:

Considere dos masas, $m = m_0$ y $M = 3m_0$, sobre las cuales no actúan fuerzas externas. Supongamos que en el instante $t = 0$, la partícula m se encuentra en el origen y en reposo, y que la partícula M se encuentra en $\vec{r}_M(0) = 2\hat{x}$ [m] moviéndose con una velocidad $\vec{v}_M(0) = 4\hat{y}$ [m/s]. Supongamos además que existe cierta interacción entre las partículas y, como consecuencia de ella, ambas aceleran. Si en el instante $t_0 = 5$ [s] la partícula m se encuentra en $\vec{r}_m(t_0) = (-2\hat{x} - 8\hat{y})$ [m], ¿en qué lugar se encontrará la otra masa?

-Encontrar la posición del centro de masas y velocidad, este no acelera ya que no hay fuerzas externas. $\vec{r}_{\rm cm}(0) = \frac{3}{2}\hat{x}[m]$, $\vec{v}_{\rm cm} = 3\hat{y}\left[\frac{m}{s}\right]$.

- En $t_0 = 5$[s], el centro de masas se encuentra en $\vec{r}_{\rm cm}(t_0) = \left(\frac{3}{2}\hat{x} + 15\hat{y}\right)[m]$

- Calcular la posición de la masa M, $\vec{r}_M(t_0) = \frac{1}{3}(8\hat{x} + 68\hat{y})[m]$

7.6.2 Colisiones

Analicemos primeramente colisiones en una dimensión. Considere dos partículas de masas m y M, restringidas a moverse (sin roce) a lo largo del eje $\hat{x}$ y estudiemos algunos casos particulares.

Caso 1: Supongamos que la partícula M incide desde la izquierda con velocidad v_0 y se mueve hacia la partícula m, que inicialmente se encuentra en reposo. Suponga que las dos partículas colisionan, quedando una adosada a la otra, formando una única partícula de masa $(M + m)$. ¿Con qué velocidad $\vec{v}$ se moverá esta nueva partícula después de la colisión? Para resolver este problema usamos el principio de conservación del momento lineal. Sobre el sistema no hay fuerzas externas actuando, luego el momento lineal se conserva. El momento lineal total antes de la colisión es

$$\vec{p}_i = M v_0 \hat{x}$$

Luego de la colisión, las partículas quedan pegadas, entonces

$$\vec{p}_f = (M + m)\, v\, \hat{x}$$

como no hay fuerzas externas, entonces el momentum se conserva, entonces $\vec{p}_i = \vec{p}_f$,

$$\begin{aligned} M v_0 &= (M + m)\, v \\ v &= \frac{M}{M + m} v_0 \end{aligned}$$

Existen casos limites cuando la masa m es muy pequena o muy grande.

Si analizamos la energía cinética del sistema,

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{2} M v_0^2 \\ E_f &= \frac{1}{2}(m + M) v^2 = \frac{1}{2} \frac{M^2}{M + m} v_0^2 \end{aligned}$$

Vemos que la energía inicial es diferente a la final, se podría decir que cuando se produce una colisión y ambas masas quedan pegadas, la energía no se conserva. A esta diferencia de energía se le llama $Q = E_f - E_i$, llamado valor Q de la reacción. En este caso, cuando Q es distinto de cero, estamos en presencia de una colisión inelástica.

Caso 2: Consideremos el caso en el que conserva la energía (Q=0), estos casos son las llamadas colisiones elásticas. Nuevamente supongamos que la partícula M incide desde la izquierda, a lo largo del eje $\hat{x}$, con velocidad $+v_0$ y que choca con la partícula m, que inicialmente se encuentra en reposo. Encontremos la velocidad final v_m y v_M de cada una de las partículas.

La diferencia con el choque inelástico, es que las partículas cuando chocan no quedan pegadas, entonces, inicialmente el momentum es el mismo, pero el final cambia

$$\begin{aligned} \vec{p}_i &= M v_0 \hat{x} \\ \vec{p}_f &= (M v_M + m v_m)\hat{x} \end{aligned}$$

Por conservación de momentum,

$$M v_0 = M v_M + m v_m$$

Vemos que hay dos incognitas y una ecuación, entonces es necesario usar la conservación de energía

$$\frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{1}{2} M v_M^2 + \frac{1}{2} m v_m^2$$

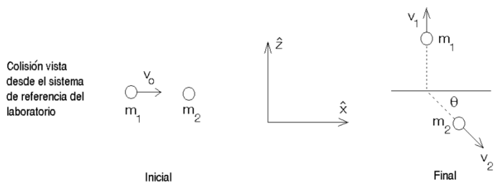
Con estas dos ecuaciones, se puede obtener

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{2M}{M+m} v_0 \\ v_M &= \frac{M-m}{M+m} v_0 \end{aligned}$$

Casos limites, M » m, M«m, M=m. Todo lo anterior se expande a 3 dimensiones, el momento lineal es un vector.

Problema:

Considere una masa m_1 que choca elásticamente contra una masa m_2 originalmente en reposo. Suponga que después del choque la masa incidente m_1 emerge en una dirección perpendicular a su dirección original (ver figura 6.1). Encuentre: a) El ángulo θ con que emerge m_2, en función de m_1 y m_2. b) La velocidad v_1 con que emerge m_1. c) La velocidad v_2 con que emerge m_2.



Solucion:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 \sqrt{\frac{m_2 - m1}{m_2 + m_1}} \\ v_2 &= v_0 \sqrt{\frac{2m_1^2}{m_2(m_2 + m_1)}} \\ \tan(\theta) &= \frac{v_1}{v_0} = \sqrt{\frac{m_2 - m1}{m_2 + m_1}} \end{aligned}$$

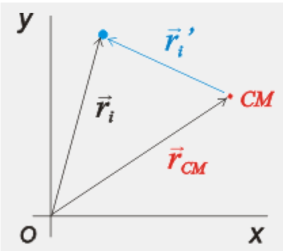
7.6.3 Trabajo en sistema de N partículas

En esta parte, veremos como se comportan las energías usando la definición de centro de masas.

El trabajo de un sistema de N partículas puede expresarse como la suma de los trabajos de cada partícula individualmente

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 + W_3 + \cdots + W_n \\ &= E_{f1} - E_{i1} + E_{f2} - E_{i2} + \ldots + E_{\text{fn}} - E_{in} \\ &= (E_{f1} + E_{f2} + E_{f3} + \cdots + E_{fn}) - (E_{i1} + E_{i2} + E_{i3} + \cdots + E_{in}) \\ &= E_f - E_i \end{aligned}$$

7.6.4 Energía cinética para un sistema de N partículas



En este punto, tenemos dos sistemas de referencia, uno con origen en O y el otro con origen en la posición del centro de masas. La posición de una partícula i vista desde el origen O corresponde a

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{\text{cm}} + \vec{r}_i'$$

En donde $\vec{r}_i'$ es la posición de la partícula vista desde el sistema de referencia del centro de masas.

Lo mismo pasa con la velocidad y la aceleración del centro de masas.

$$\begin{aligned} \vec{v}_i &= \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{v}_i' \\ \vec{a}_i &= \vec{a}_{\text{cm}} + \vec{a}_i' \end{aligned}$$

Para calcular la energía cinética, primero veamos la energía cinética de una partícula i,

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \\ &= \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{\text{cm}} + \vec{v}_i') \cdot (\vec{v}_{\text{cm}} + \vec{v}_i') \\ &= \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{\text{cm}} \cdot \vec{v}_{\text{cm}}) + \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i' \cdot \vec{v}_i') + m_i \vec{v}_i' \vec{v}_{\text{cm}} \end{aligned}$$

Si sumamos la energía cinética de todas las partículas i, se obtiene

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{N} T_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_{\text{cm}} \cdot \vec{v}_{\text{cm}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_i' \cdot \vec{v}_i') + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i' \vec{v}_{\text{cm}} \\ &= \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i'^2 + \vec{v}_{\text{cm}} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i' \\ &= \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i'^2 + M \vec{v}_{\text{cm}} \vec{p}_{\text{cm}}' \end{aligned}$$

Pero la velocidad del centro de masas con respecto al centro de masas es cero, entonces

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i'^2 \\
&= T_{\text{cm}} + T'
\end{aligned}
$$

Esto significa que la energía cinética del sistema se puede calcular como la energía cinética del centro de masas mas la energía cinética del sistema con respecto al centro de masas.

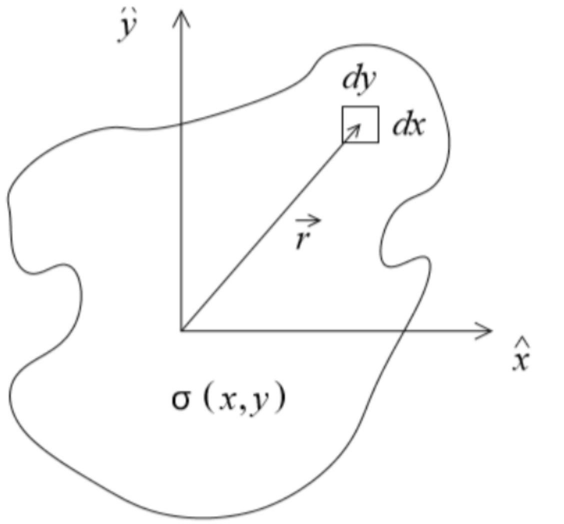
7.6.5 Energía potencial gravitatoria

Sumamos las energías potencial gravitatoria de cada partícula y luego las sumamos,

$$
\begin{aligned}
U &= m_1 g h_1 + m_2 g h_2 + \cdots + m_n g h_n \\
&= g\sum_{i=1}^{N} m_i h_i \\
&= M g h_{\text{cm}}
\end{aligned}
$$

8 Estática del sólido rígido

8.1 Centro de masas de una superficie uniforme

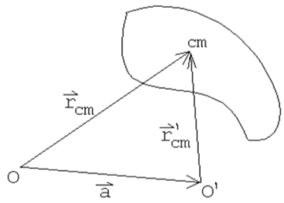


Para calcular el centro de masas de una superficie uniforme, es necesario dividir el cuerpo en cuadrados infinitamente pequeños, de area $\text{dA} = \text{dxdy}$ y masa dm. Si consideramos que la masa de cada cuadrado tiene una densidad $\sigma(\vec{r}_i)$, entonces, el centro de masas es

$$
\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum \sigma(\vec{r}_i)\vec{r}_i \,\text{dxdy}}{\sum \sigma(\vec{r}_i)\,\text{dxdy}}
$$

Esta es una expresión general, en este curso solo se verán figuras con alta simetría.

Si deseamos cambiar el origen de coordenadas, el siguiente dibujo puede ser de gran ayuda,

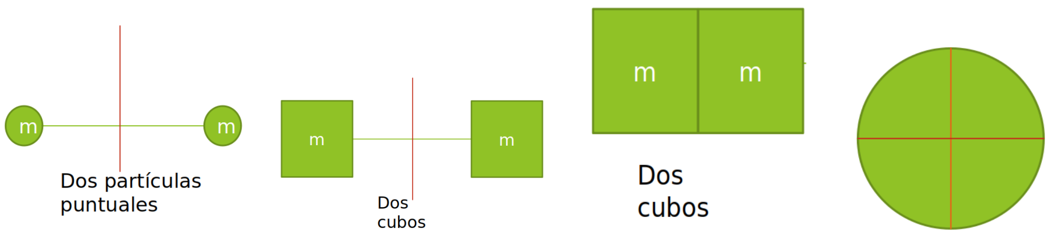


Vemos dos sistemas de referencia, O y O'. Usando suma de vectores, podemos obtener

$$\vec{r}_{\mathrm{cm}} = \vec{r}'_{\mathrm{cm}} + \vec{a}$$

En donde $\vec{r}_{\mathrm{cm}}$ es el centro de masas visto desde el sistema de referencia O, $\vec{r}'_{\mathrm{cm}}$ es el sistema de referencia visto desde O' y $\vec{a}$ el vector que va desde el origen O hasta O'.

Ahora veremos el centro de masas de cuerpos con alta simetría,



En el caso de dos masas puntuales, podemos ver que el centro de masas se encuentra entre dos partículas. Si estas dos masas dejan de ser partículas puntuales y pasan a tener una superficie, se puede ver que el centro de masas también estará en el punto medio entre dos partículas. Si estos cuadrados se juntan y forman un cuerpo mas grande, su centro de masas seguirá estando en la misma posición.

8.2 Producto Cruz

Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores. Entonces definimos el vector $\vec{C}$, que es el producto vectorial entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$, por

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \sin(\gamma) \hat{C}$$

Donde γ es el ángulo mas pequeño entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, mientras que $\hat{C}$ es un vector unitario perpendicular al plano engendrado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$. Existen dos vectores unitarios que cumplen con la relación anterior, por lo que, por convención, usaremos el de la regla de la mano derecha. Se vé que a diferencia del producto punto, el producto cruz da como resultado un vector.

(Ver producto cruz entre vectores unitarios)

Una propiedad importante es que el producto cruz no es conmutativo,

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{A} \times \vec{B}$$

Veamos el producto cruz entre dos vectores

$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$

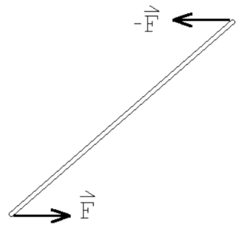
$\vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}$

$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x B_y - A_y B_x) \hat{z} + (A_y B_z - A_z B_y) \hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{y}$

El producto cruz puede usar para calcular el area de un paralelógramo $\mathrm{Area} = |\vec{A} \times \vec{B}|$

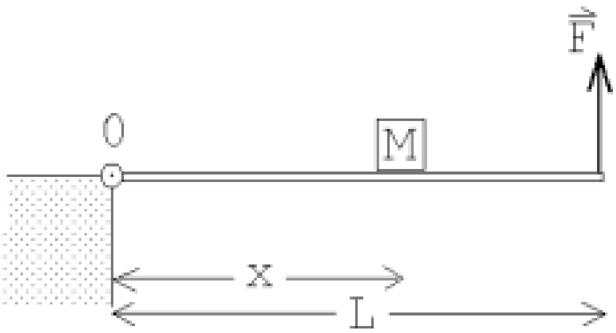
8.3 Torque

Hasta ahora solo hemos visto fuerzas aplicadas a una masa puntual. Pero en el caso de tener una barra, por ejemplo, es muy distinto aplicar la fuerza en el centro de esta que en el borde. Consideremos el siguiente sistema,



La fuerza neta sobre la barra suma cero, sin embargo, no significa que el cuerpo no comenzará a moverse. De hecho, la barra comenzará a rotar. En este punto, podemos decir que además de la dirección y la magnitud de la fuerza, también importa el donde se aplica esta fuerza. Por ejemplo, en el dibujo anterior, si se aplican de esa manera el cuerpo rotara, pero si ambas se aplican en el centro, seguirá quieto.

Consideremos el siguiente sistema

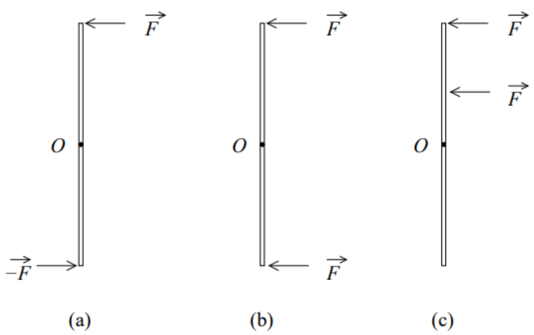


Qué fuerza es necesaria para que que la barra esté en equilibrio? $F = \mathrm{mg}\, x / L$. Este resultado púede llamarse la ley de palancas. Pero lo importante de esto, es que no solo importa la fuerza aplicada, si no también donde se aplica. Para poder describir estos sistemas, necesitamos definir una nueva cantidad, el torque,

El torque $\vec{\tau}$ que genera una fuerza $\vec{F}$ respecto a un punto P es

$$\vec{\tau} \;=\; \vec{r} \times \vec{F}$$

en donde $\vec{r}$ es el vector que va desde el punto P hasta el lugar donde se aplica la fuerza $\vec{F}$. Veamos el siguiente caso, en donde se aplica la fuerza en diferentes puntos.



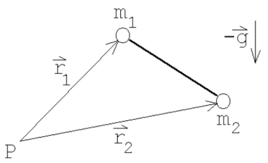
Si el origen se encuentra en O, vemos que la dirección del torque que ejerce cada fuerza es la misma, esto significa que comenzará a girar. La dirección de giro se puede ver usando la regla de la mano derecha. En b) se aplican las mismas fuerzas y si el origen esta justo a la mitad, la suma de todos los torques ceria cero, por lo que no debería girar. Es claro que (c) debería girar. Debido a todo a lo anterior, se puede decir que el torque es la responsable de los giros.

Se puede decir que si la suma de todos los torques en el sistema, el torque neto, respecto a un punto P, es nulo, entonces el cuerpo no cambiará su estado rotacional. Esto es análogo a la segunda ley de Newton, reemplazando fuerza por torque y velocidad con velocidad angular.

Ejercicio: Ver caso de imagen 1

8.4 Torque y centro de masas

Consideremos el siguiente caso,



Consideremos dos masas unidas m_1 y m_2, unidas por una barra de masa despreciable. Evaluemos el toque neto.

$$
\begin{aligned}
\vec{\tau} &= \vec{r_1}\times(-m_1 g\,\hat{z})+\vec{r_2}\times(-m_2 g\,\hat{z}) \\
&= \frac{(m_1\vec{r_1}+m_2\vec{r_2})}{m_1+m_2}\times(-(m_1+m_2)g\,\hat{z}) \\
&= \overrightarrow{r_{\text{cm}}}\times(-\text{Mg}\,\hat{z})
\end{aligned}
$$

Esto significa que si conocemos la posición del centro de masas, podemos evaluar el torque debido a la fuerza de gravedad suponiendo que la masa total se encuentra en ese punto.

8.5 Equilibrio

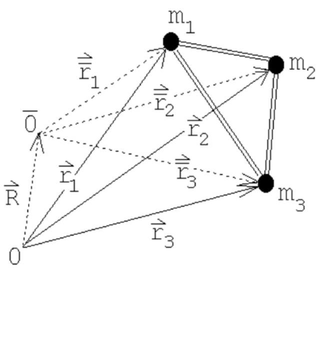
Hasta ahora, la condición de equilibrio si la fuerza neta sobre el cuerpo es cero. Esto es cierto cuando las partículas son puntuales. Cuando tenemos sistemas más complejos, que tienen una estructura (como un círculo), esto es válido solo para el centro de masas.

Ley de equilibrio: Para que un cuerpo este en equilibrio es necesario que se cumplan las siguientes dos condiciones:

i) la fuerza sobre el sistema debe ser nula

ii) el torque sobre el sistema debe ser nulo

Si la fuerza neta sobre el cuerpo es cero, entonces el torque neto es independiente del punto respecto al cual se evalúa. En particular, si el torque es nulo respecto a un punto, también lo será respecto a cualquier otro punto.



Sean $\vec{r}_j$ y $\vec{\bar{r}}_j$ los vectores posición de las masas m_j respecto a un origen O y $\bar{O}$, respectivamente. Sea además $\vec{R}$ el vector que une los puntos O y $\bar{O}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\vec{\tau} &= \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j \\
&= \sum_j (\vec{R} + \vec{\bar{r}}_j) \times \vec{F}_j \\
&= \sum_j (\vec{R} \times \vec{F}_j) + \sum_j \vec{\bar{r}}_j \times \vec{F}_j \\
&= \vec{R} \times \sum_j \vec{F}_j + \sum_j \vec{\bar{r}}_j \times \vec{F}_j \\
&= \sum_j \vec{\bar{r}}_j \times \vec{F}_j \\
&= \vec{\bar{\tau}}
\end{aligned}$$

Si la fuerza neta $\vec{F}_{\text{tot}}$ que actúa sobre un cuerpo de masa M no es nula, entonces el punto del cuerpo que es acelerado de acuerdo a la segunda ley de newton es el centro de masas. O sea, se tiene que

Es importante mencionar que si estamos buscando el equilibrio de un cuerpo, la fuerza neta siempre será cero, por lo que el torque neto no dependerá del origen del sistema de referencia.

Problema:

Una escalera de masa m y largo L se encuentra apoyada contra una pared lista, formando un ángulo α con ella. Una persona de masa M se encuentra sobre la escalera. Cual es el mínimo coeficiente de roce estático que debe existir entre el suelo y la escalera para que la escalera no resbale, independientemente de la altura a la que se encuentra la persona?

9 Fluidos

En este capitulo nos enfocaremos en describir alguna de las propiedades de los fluidos, como el agua. Como mencionamos en el capítulo anterior, podemos escribir la densidad volumétrica como

$$\rho = \frac{m}{V}$$

en donde m es la masa y V es el volumen. Otro concepto importante es la presión, esta se define como

$$P = \frac{F}{A}$$

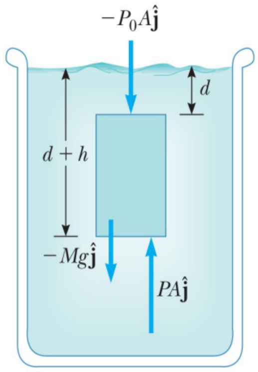
En donde F es la fuerza y A es el area en donde se aplica la fuerza. Las unidades de la presión es el Pascal [Pa]=[N/m^2]. Al sumergir un objeto en un fluido, este ejercerá una fuerza sobre las superficies del objeto.Una propiedad importante es que si sumergimos por ejemplo, un cubo, este sentida una fuerza siempre perpendicular a la superficie. Por ejemplo, si se sumerje un cubo, el fluido ejercerá una fuerza en todas sus caras. Otro concepto importante es que si tomamos un punto dentro del fluido, se ejercerá la misma presión en todas las direcciones, razón por la que es un escalar.

Si tenemos un fluido y sumergimos un cuerpo, la presión que sentira dependerá de la profundidad de la forma

$$P = P_0 + \rho g h$$

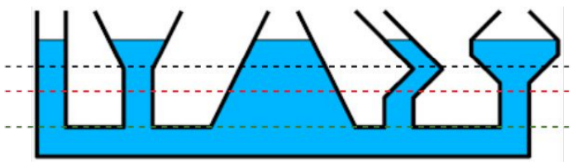
En donde P_0 es la presión atmosférica, ρ es la densidad del fluido, g es la constante de gravedad y h es la profunidad.

Por ejemplo, si tenemos el siguiente dibujo

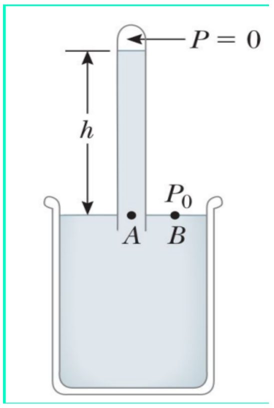


Vemos que en la parte superior se ejerce una fuerza hacia abajo debido a la atmósfera y a la masa de agua que está subre esa capa. En cambio, en la parte final, se ejercerá una fuerza PA hacia arriba. La presión atmosferica es $P_0 = 1\text{atm} = 1.013 \text{ x } 10^5\,\text{Pa}$.

Otra propiedad importante de los fluidos, es que se tiene la misma presión en planos horizontales, por ejemplo,

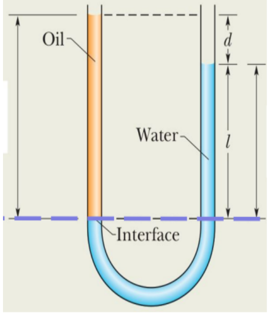


En donde la presión en la misma en todas las lineas horizontales. Otro ejemplo es el siguiente:



Como la presión en A y B son la misma, entonces, $P_0 = \rho g h$. Si el líquido es mercurio, entonces $h = 0.760$[m]. Esto nos dice que la presión atmosferica se define como la presión equivalente a una columna de mercurio que tiene exactamente 0.760m a 0 grados celcius.

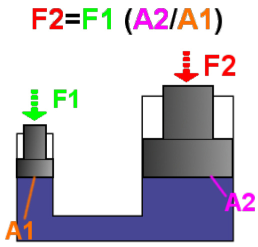
Ejemplo:



Si la densidad del agua es ρ_0. Calcule la densidad del aceite.

9.1 Principio de Pascal

Cualquier cambio en la presión aplicada a un fluido se transmite sin disminución a todos los puntos del fluido y a las paredes del contenedor. Por ejemplo,



Si consideramos que estan en la misma horizontal, la presión tiene que ser la misma, entonces

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

9.2 Principio de Arquímides

La magnitud de la fuerza de empuje sobre un objeto siempre es igual al peso del fluido desplazado por el objeto. Matemáticamente,

$$F_b = m_f g$$

En donde F_b es la magnitud del empuje, m_f es la masa del fluido.

Ejemplo:

Considere tres cubos del mismo tamaño, adheridos tal como se muestra en la figura. El material del cual están hechos los dos cubos A y B es ρ_1. Mientras que el cubo C está hecho de otro material de densidad ρ_2. Cual será la orientación de equilibrio que el objeto adquirirá cuando esta flotando rodeado de agua?.