Control recuperativo

P1. Se dispara desde el reposo verticalmente un cohete, el que asciende con aceleración constante a durante un tiempo t_1. En ese momento se agota su combustible y continúa como partícula en caída libre.

a) (2 pts.) Defina un sistema de referencia, a partir de este escriba las condiciones iniciales y ecuaciones para la posición y velocidad del cohete entre $t = 0$ y $t = t_1$.

+0.5 puntos Definimos un eje de referencia y con origen en el lugar de lanzamiento (suelo) y apuntando verticalmente hacia arriba.

+0.5 puntos En este sistema de referencia, la posición inicial es $y_0 = 0$ y la velocidad inicial es $v_0 = 0$. Las ecuaciones para la posición y velocidad del cohete entre $t = 0$ y $t = t_1$ son

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}at^2, \\ v(t) &= at. \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &\textbf{+0.5 puntos} \quad (1) \\ &\textbf{+0.5 puntos} \quad (2) \end{aligned}$$

b) (2 pts.) Utilizando el mismo sistema de referencia que en la parte a), escriba las condiciones iniciales y ecuaciones para la posición y velocidad del cohete para cualquier tiempo posterior a t_1.

Para encontrar las condiciones iniciales de la posición y velocidad después que se acaba el combustible, evaluamos las expresiones (1) y (2) en $t = t_1$,

$$y(t_1) = \frac{1}{2}at_1^2, \quad \textbf{+0.3 puntos} \quad (3)$$

$$v(t_1) = at_1. \quad \textbf{+0.3 puntos} \quad (4)$$

Para $t > t_1$, el cohete está en caída libre por lo que su aceleración es $-g$. Las expresiones para la posición y velocidad para $t > t_1$ son

$$\textbf{+0.5 puntos} \quad y_2(t) = y(t_1) + v(t_1)(t - t_1) - \frac{1}{2}g(t - t_1)^2, \quad (5)$$

$$\textbf{+0.5 puntos} \quad v_2(t) = v(t_1) - g(t - t_1). \quad (6)$$

Reemplazando las expresiones (3) y (4), obtenemos después de simplificar las expresiones,

+0.2 puntos $$\boxed{y_2(t) = at_1\left(t - \frac{t_1}{2}\right) - \frac{1}{2}g(t-t_1)^2,} \tag{7}$$

+0.2 puntos $$\boxed{v_2(t) = at_1 - g(t-t_1).} \tag{8}$$

c) (2 pts.) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el cohete? Escriba su resultado en función de a, t_1 y g.

+0.5 puntos La altura máxima se alcanza cuando el cohete se detiene, antes de comenzar a caer. Si llamamos t^* a ese instante de tiempo, tenemos, usando la expresión (8),

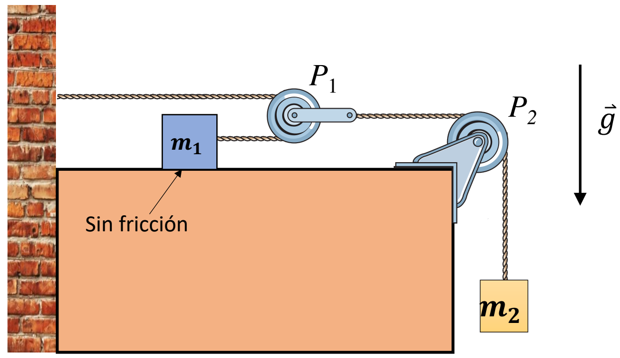
+0.5 puntos $$v_2(t^*) = at_1 - g(t^* - t_1) = 0 \Rightarrow t^* = t_1\left(1 + \frac{a}{g}\right). \tag{9}$$

Reemplazando este valor en (7),

+0.5 puntos
$$\begin{aligned}
y(t^*) &= at_1\left(t^* - \frac{t_1}{2}\right) - \frac{1}{2}g(t^*-t_1)^2, && (10)\\
&= at_1\left(\frac{t_1}{2} + \frac{at_1}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{at_1}{g}\right)^2, && (11)\\
&= \frac{at_1^2}{2} + \frac{a^2t_1^2}{2g} && (12)\\
&= \boxed{\frac{at_1^2}{2}\left(1 + \frac{a}{g}\right)} && (13)
\end{aligned}$$

+0.5 puntos

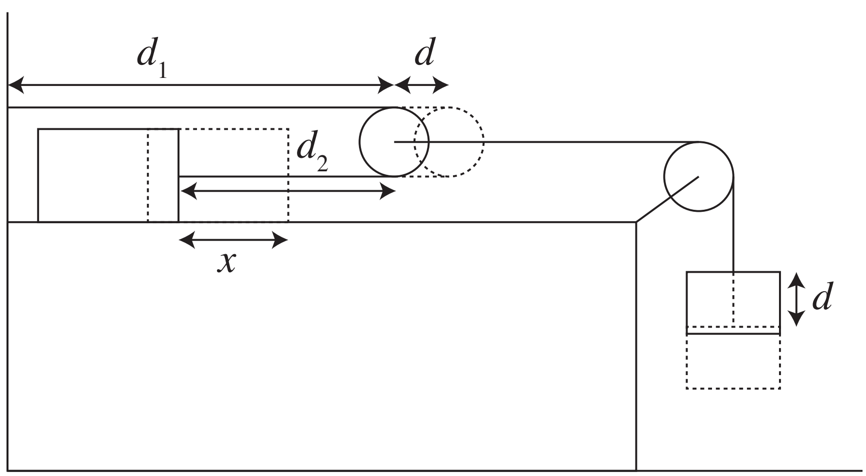
P2. El bloque de masa m_1 está sobre sobre una superficie horizontal pulida, y se conecta a una masa m_2 a través de una polea de masa despreciable P_1 y una polea fija P_2, tal como se muestra en la figura.



a) (2 pts.) Demuestre que la aceleración de m_1 es el doble de la aceleración de m_2.

Para demostrarlo, supongamos que m_2 se desplaza una distancia d hacia abajo y veamos cuánto se desplaza m_1 hacia la derecha (ver figura). Suponiendo que las cuerdas son inextensibles, notamos que la polea P_1 se desplaza la misma distancia d hacia la derecha.

+0.5 puntos



+0.5 puntos

Por otro lado, la cuerda de la izquierda, también siendo inextensible, tiene una longitud constante. Comparando la longitud de la cuerda antes y después del movimiento, tenemos

$$d_1 + d_2 = (d_1 + d) + (d_2 - x + d). \quad (14)$$

donde x es el desplazamiento de m_1 hacia la derecha. De acá se deduce que

+0.5 puntos

$$x = 2d, \quad (15)$$

+0.5 puntos

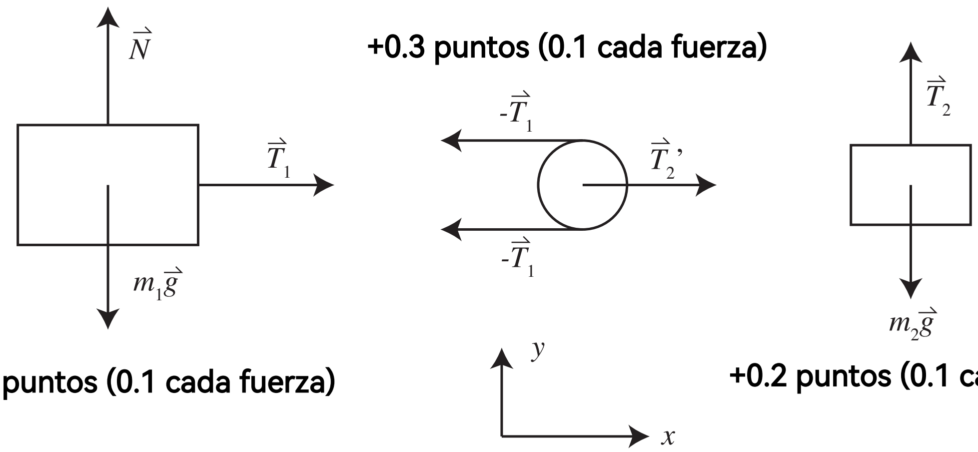
y por lo tanto m_1 se mueve el doble de rápido que m_2 y la aceleración de m_1 es el doble que la de m_2, es decir,

$$\boxed{a_1 = 2a_2,} \quad (16)$$

donde a_1 es la magnitud de la aceleración de m_1 y a_2 es la magnitud de la aceleración de m_2.

b) (3 pts.) Determine la aceleración de cada bloque en función de m_1, m_2 y g.

Hacemos los diagramas de cuerpo libre de m_1, m_2 y P_1.



+0.3 puntos (0.1 cada fuerza) **+0.3 puntos (0.1 cada fuerza)** **+0.2 puntos (0.1 cada fuerza)**

+0.1 puntos (sist. referencia)

+0.1 puntos En la figura, $|\vec{T}_2'| = |\vec{T}_2|$. Usando el sistema de referencia (x, y) de la figura, tenemos por segunda ley de Newton, para m_1,

$$T_1 = m_1 a_1, \tag{17}$$
+0.2 puntos

$$N - m_1 g = 0 \tag{18}$$
+0.2 puntos

+0.1 puntos donde se usó que la aceleración de m_1 es $\vec{a}_1 = a_1 \hat{x}$. Para m_2, se tiene

$$T_2 - m_2 g = -m_2 a_2, \tag{19}$$
+0.2 puntos

+0.1 puntos donde se usó que m_2 cae, es decir que su aceleración es $\vec{a}_2 = -a_2 \hat{y}$ (recordar que se definió a_2 como la magnitud de la aceleración de m_2).

Finalmente, para la polea P_1 se tiene

$$T_2 - 2T_1 = 0, \tag{20}$$
+0.2 puntos

+0.1 puntos pues su masa es despreciable.

Hay varias maneras de resolver el sistema de ecuaciones a partir de acá. Por ejemplo, usando las ecuaciones (16) y (20) en (17) y (19), se obtienen las ecuaciones

$$T_1 = 2m_1 a_2, \tag{21}$$
$$2T_1 - m_2 g = -m_2 a_2. \tag{22}$$

+0.3 puntos: algebra

Multiplicando la primera por 2 y restando ambas expresiones, obtenemos

$$m_2 g = (4m_1 + m_2)a_2 \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{m_2}{4m_1 + m_2} g.} \quad \textbf{+0.3 puntos} \tag{23}$$

Y por (16),

$$\boxed{a_1 = \frac{2m_2}{4m_1 + m_2} g.} \quad \textbf{+0.3 puntos} \tag{24}$$

c) (1 pt.) Determine la tensión en cada cuerda en función de m_1, m_2 y g.

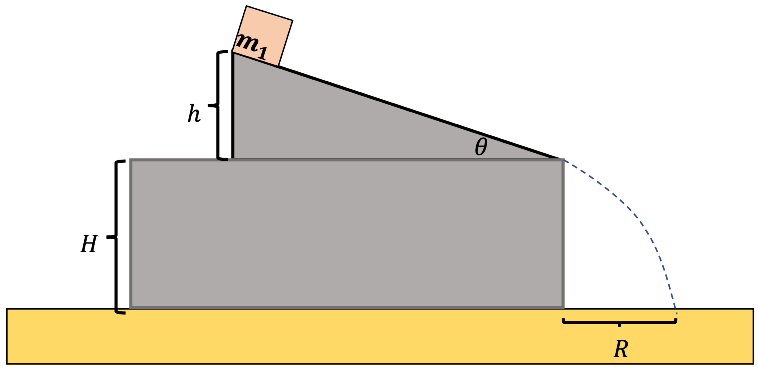
Usando ahora la ecuación (17), se obtiene

$$\boxed{T_1 = \frac{2m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g,} \quad \textbf{+0.5 puntos} \tag{25}$$

mientras que de (20),

$$\boxed{T_2 = \frac{4m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g.} \quad \textbf{+0.5 puntos} \tag{26}$$

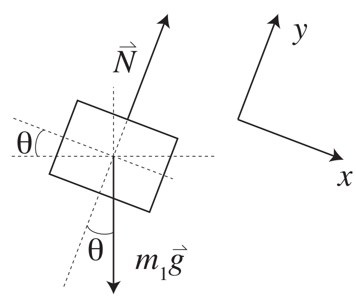
P3. Un objeto de masa m_1 se deja caer desde el punto más alto de un plano inclinado, el cual forma un ángulo θ con la horizontal y tiene una altura máxima h. El plano inclinado está a su vez sobre un bloque rectangular de altura H con respecto al suelo. El plano inclinado y el bloque se encuentran firmemente adosados entre sí y al suelo, de manera que no se mueven debido al movimiento de m_1. Desprecie el roce entre m_1 y el plano inclinado.



a) (2 pts.) Determine la magnitud de la aceleración de m_1 a lo largo de su movimiento sobre el plano inclinado.

Consideremos el diagrama de cuerpo libre para m_1 mientras cae por el plano inclinado.

+0.2 puntos ángulo



+0.1 puntos: sistema de referencia

+0.2 puntos (0.1 cada fuerza)

En el sistema de referencia (x, y) de la figura, la segunda ley de Newton indica que

$$m_1 g \operatorname{sen}\theta = m_1 a, \quad \textbf{+0.5 puntos} \tag{27}$$
$$N - m_1 g \cos\theta = 0. \quad \textbf{+0.5 puntos} \tag{28}$$

De la ecuación (27) despejamos lo pedido,

$$\boxed{a = g \operatorname{sen}\theta.} \quad \textbf{+0.5 puntos} \tag{29}$$

b) (2 pts.) Determine la rapidez con que m_1 sale del plano inclinado.

+0.4 puntos: explicación conservación energía y conclusión Ei=Ef

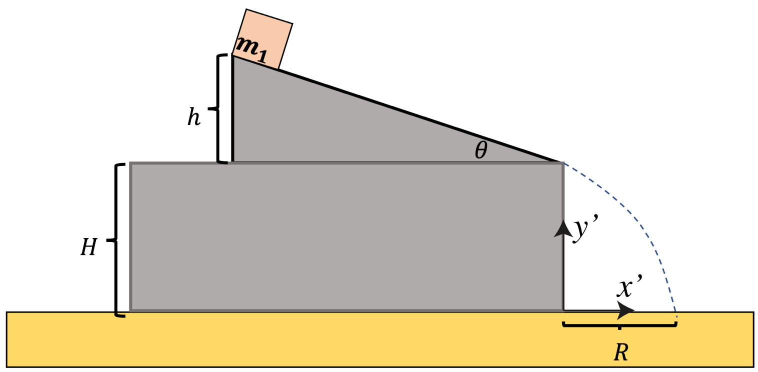
+0.3 puntos: elección sistema de referencia para energía potencial

A lo largo del plano inclinado, no hay roce y la normal no realiza trabajo, por lo que se conserva la energía mecánica. Considerando la altura de referencia para la energía potencial gravitatoria en el suelo (ver figura), se tiene

$$E_i = m_1 g(h + H), \quad \textbf{+0.5 puntos} \tag{30}$$

$$E_f = m_1 gH + \frac{1}{2}m_1 v^2, \quad \textbf{+0.5 puntos} \tag{31}$$

$$E_i = E_f \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2gh}.} \quad \textbf{+0.3 puntos} \tag{32}$$



+0.1 puntos: sistema de referencia

c) (2 pts.) Determine la distancia R a la que m_1 golpea el suelo, con respecto a la base del bloque.

La masa m_1 realiza un movimiento parabólico con posición y velocidad inicial

$$x'_0 = 0, \quad \textbf{+0.1 puntos} \tag{33}$$

$$y'_0 = H, \quad \textbf{+0.1 puntos} \tag{34}$$

$$v_{x'0} = v\cos\theta, \quad \textbf{+0.2 puntos} \tag{35}$$

$$v_{y'0} = -v\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \textbf{+0.2 puntos} \tag{36}$$

donde ahora se usó el sistema de coordenadas (x', y') con origen en la base del bloque rectangular. En este sistema de coordenadas, la trayectoria está dada por

$$x'(t) = v\cos\theta t, \quad \textbf{+0.3 puntos} \tag{37}$$

$$y'(t) = H - v\,\mathrm{sen}\,\theta t - \frac{1}{2}gt^2. \quad \textbf{+0.3 puntos} \tag{38}$$

En algún tiempo t^* el bloque cae al suelo,

$$y'(t^*) = H - v\,\mathrm{sen}\,\theta t^* - \frac{1}{2}gt^{*2} \quad \textbf{+0.2 puntos} \tag{39}$$

de donde despejamos el tiempo t^*,

$$t^* = -\frac{v \operatorname{sen}\theta}{g} + \frac{\sqrt{v^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2gH}}{g}. \qquad \textbf{+0.2 puntos} \tag{40}$$

En ese momento, la posición x' de m_1 es

$$\boxed{x'(t^*) = R = \frac{v\cos\theta}{g}\left(-v \operatorname{sen}\theta + \sqrt{v^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2gH}\right),} \quad \textbf{+0.3 puntos} \tag{41}$$

donde v está dada por (32).