

Pregunta 2

Una barra de masa M y largo L puede girar libremente en torno a su punto de apoyo O en una superficie horizontal. La masa se mantiene en equilibrio estático con una masa m y una cuerda como indica la figura. Encuentre el ángulo α de equilibrio si se cumple que $\frac{m}{M} = \frac{1}{2}$.

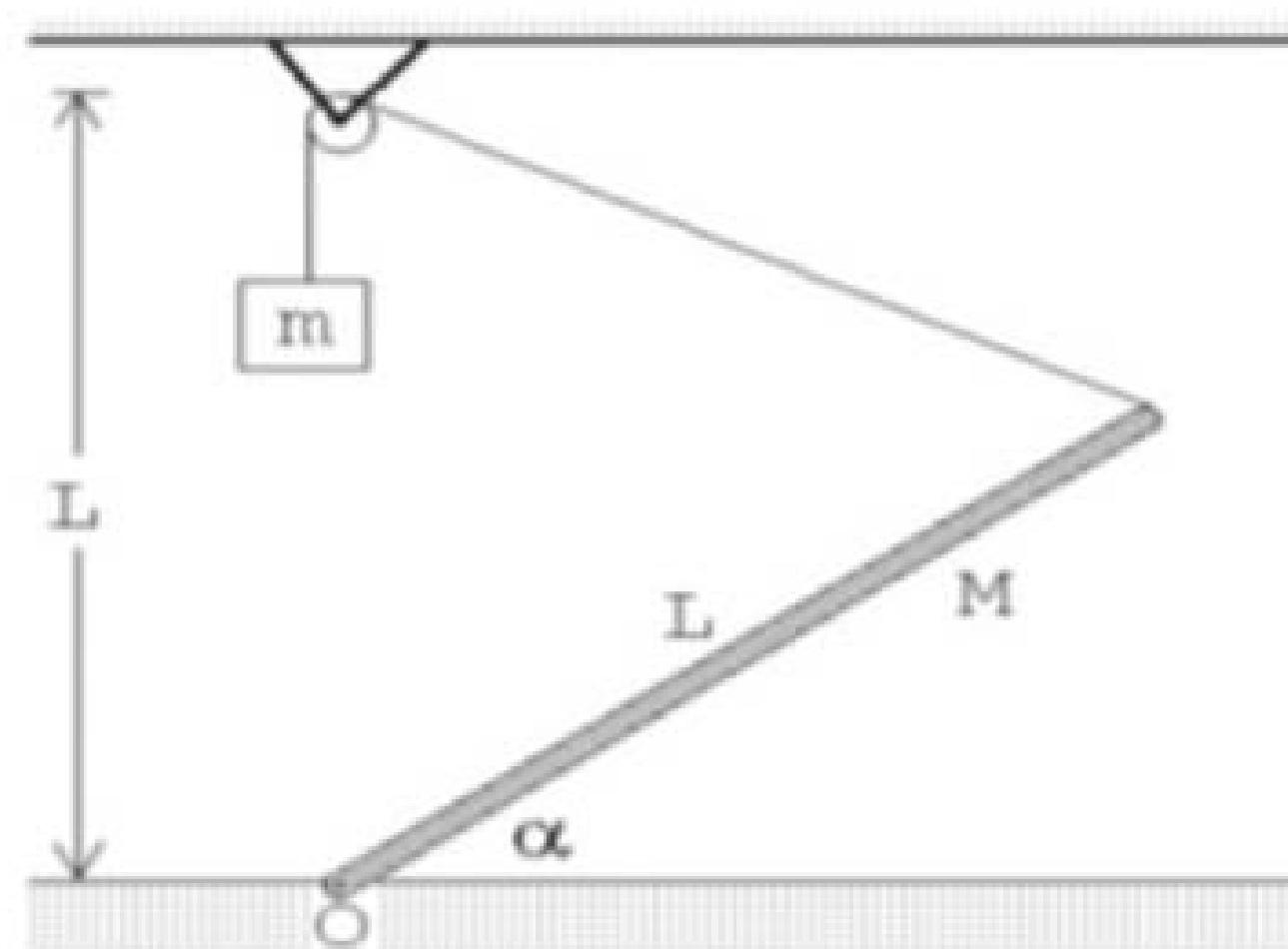
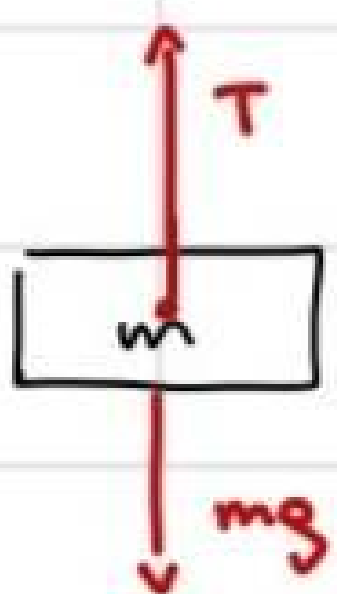


Figura 2: Esquema



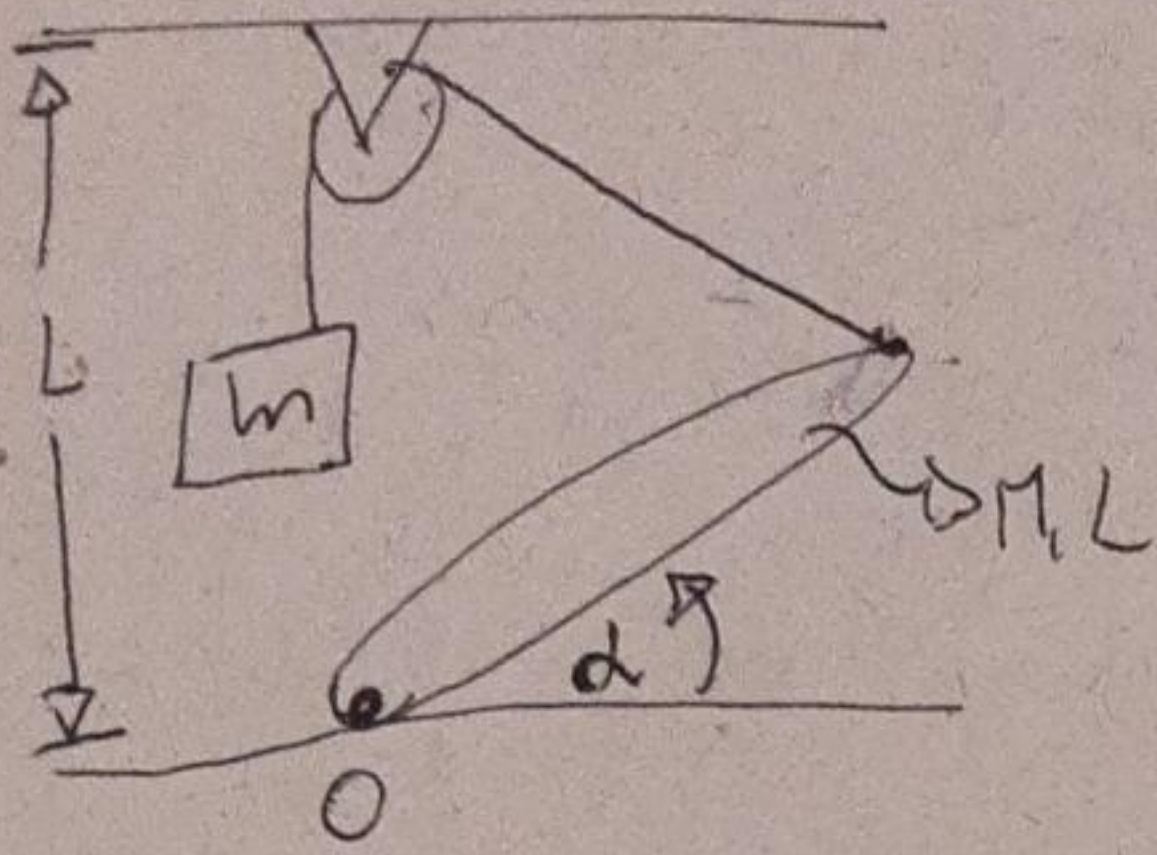
$$\sum F_y = T - mg = 0$$

$$mg = T$$

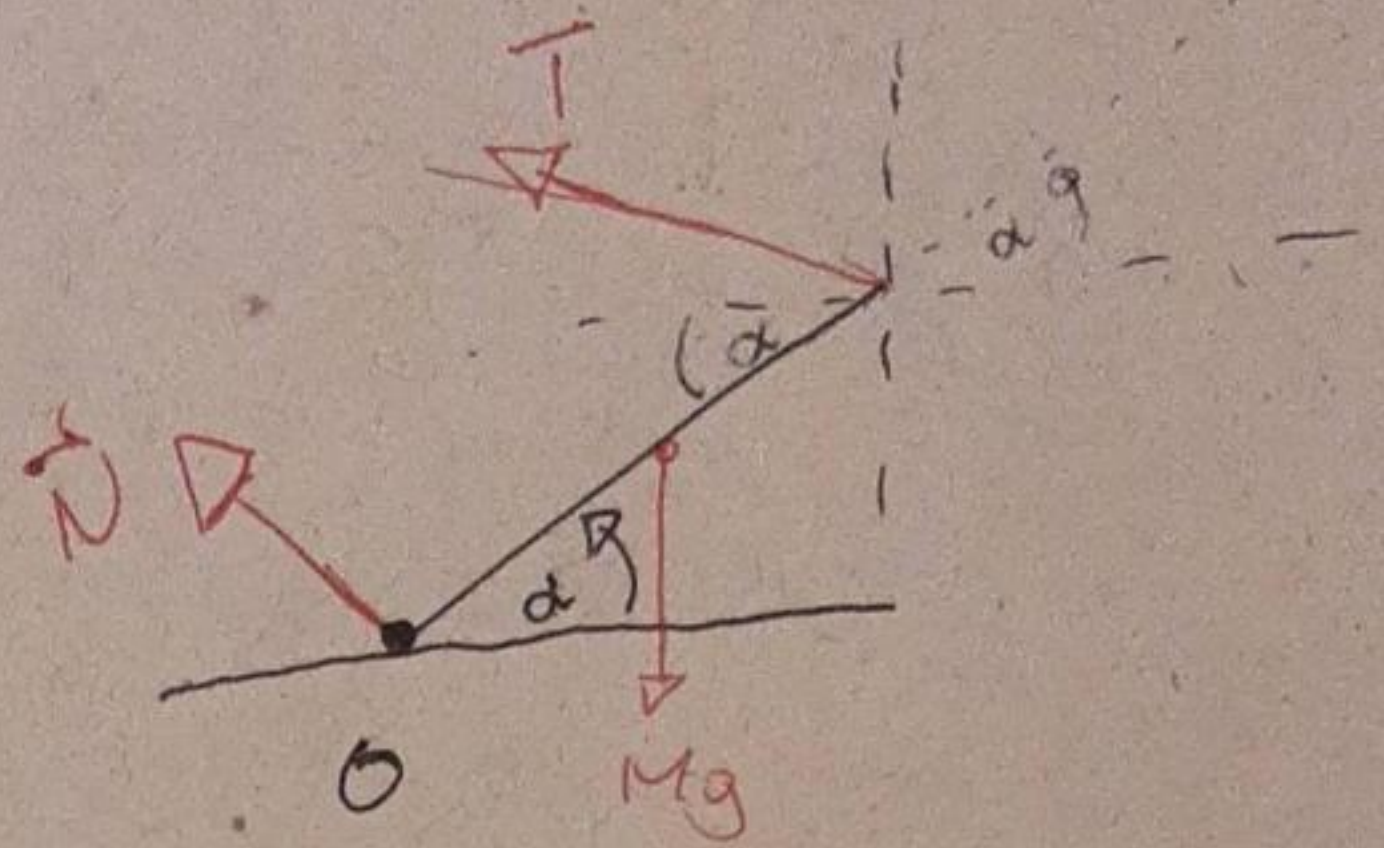
$$\sum F_x =$$

$$-T$$

Ángulo de equilibrio de este sistema se encuentre en equilibrio estático y además $\frac{m}{M} = \frac{1}{2} \Rightarrow M = 2m$



DCL



• Porque queremos equilibrio estático, se cumple

$$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum \tau = 0.$$

• Veamos el torque neto.

↳ Fijemos el origen de nuestras mediciones en O. Esto significa que los brazos, o vectores posición del punto de aplicación de las fuerzas, parten en O, terminan en el lugar donde se aplica la fuerza, y tienen dirección α con respecto al suelo.

→ Tenemos

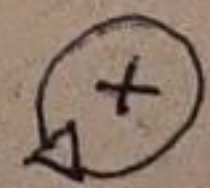
$$\sum \tau = \tau_N + \tau_{Mg} + \tau_T = 0$$

$$= r_N \cdot N \cdot \sin \theta_N + r_{Mg} \cdot Mg \cdot \sin \theta_{Mg} + r_T \cdot T \cdot \sin \theta_T = 0$$

r_i es el brazo, correspondiente a cada fuerza

θ_i es el ángulo entre r_i y F_i

• Fijemos el sentido antihorario como positivo:



$r_1 = 0$, pues N está siendo aplicada en O

$$r_2 = r_{Mg} = \frac{L}{2} \quad \text{y} \quad r_3 = r_T = L.$$

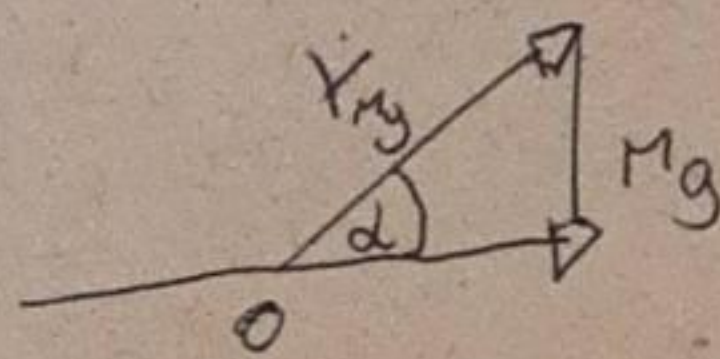
• Para los ángulos lo podemos hacer de dos maneras:

1^{ra} Usar vector Fuerza y encontrar los ángulos θ .

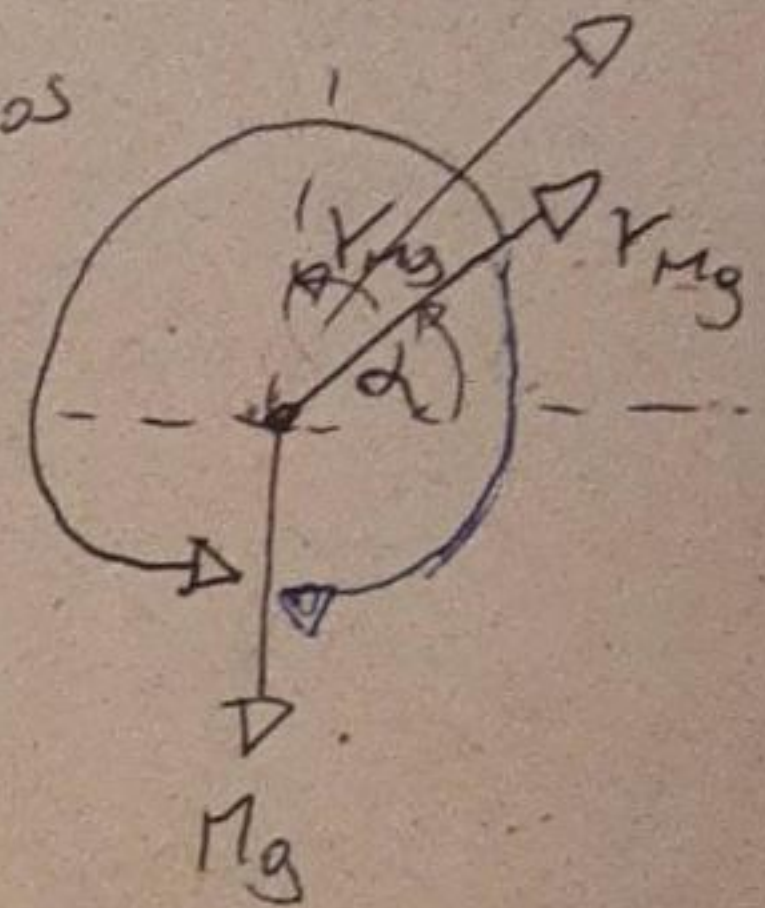
2^{da} ~~Usar~~ Fijar un Sistema de Referencia ortogonal a la barra y utilizar los componentes horizontales y verticales de la Fuerza cuyo Torque queramos calcular. de este modo $\theta_y = \frac{\pi}{2}$ ó $-\frac{\pi}{2}$ y $\theta_x = 0$ ó π .

En ambos casos ~~transportaremos~~ o proyectaremos ambos vectores, r_p y F_p , en el mismo origen. Manteniendo la dirección!

1^{ra} Forma: M_g :



Proyectamos



$$\text{Ángulo } \theta_{M_g} = \pi + \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{3\pi}{2} - \alpha = 270^\circ - \alpha$$

$$\text{o bien, } \theta_{M_g} = -\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -(90^\circ + \alpha)$$

↳ Sentido contrario (Horario!)
↳ Ángulo Azul

$$\sin(\theta_{M_g}) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \cos(-\alpha) + \sin(-\alpha) \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{\sin(\theta_{M_g}) = -\cos \alpha}$$

Vemos la otra opción

$$\sin(\theta_{M_g}) = \sin\left(-\left[\frac{\pi}{2} + \alpha\right]\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\left[\sin\frac{\pi}{2} \cos \alpha + \sin \alpha \cos\frac{\pi}{2}\right]$$

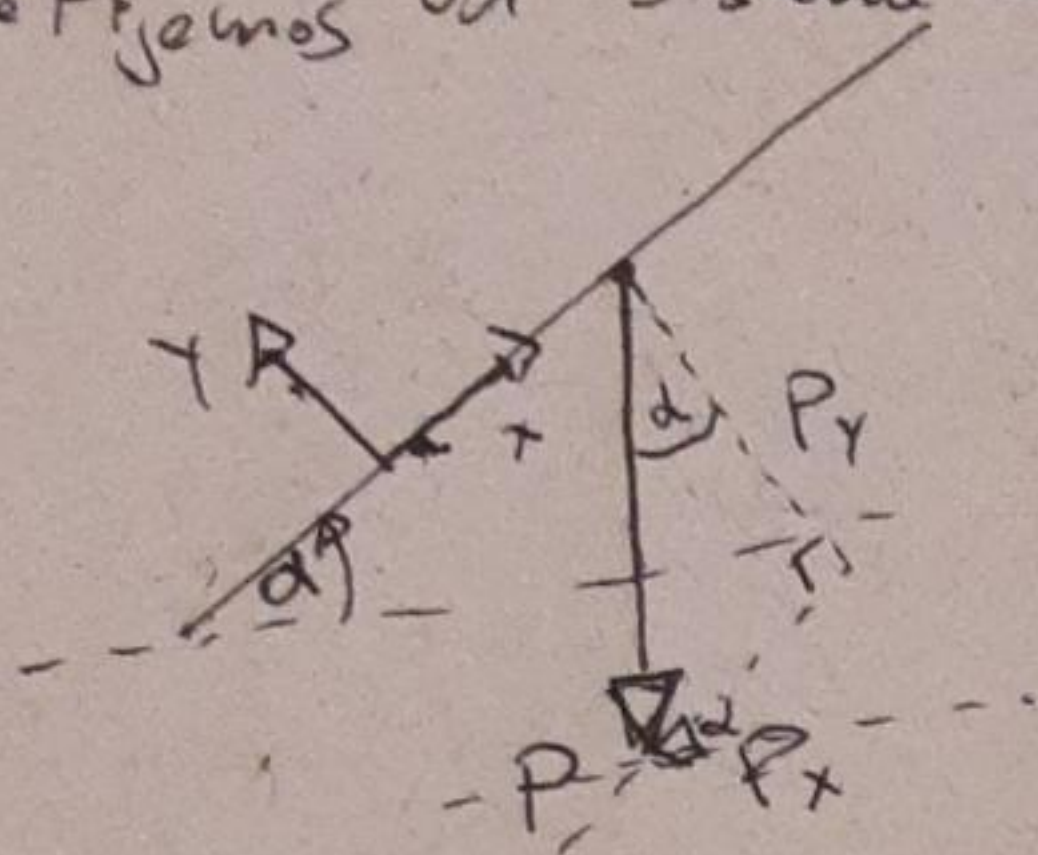
$$\sin \theta_{M_g} = -\cos \alpha$$

$$\Rightarrow \tau_{M_g} = r_{M_g} \cdot M_g \cdot \sin(\theta_{M_g}) = \boxed{-\frac{L}{2} M_g \cos \alpha = \tau_{M_g}}$$

2da Forma Descomponemos el vector $Mg = P$ en sus componentes

Horizontales P_x y Verticales P_y .

• Fijamos un Sistema de Referencia sólido a la inclinación de la barra, i.e.



$$P_y = P \cos \alpha$$

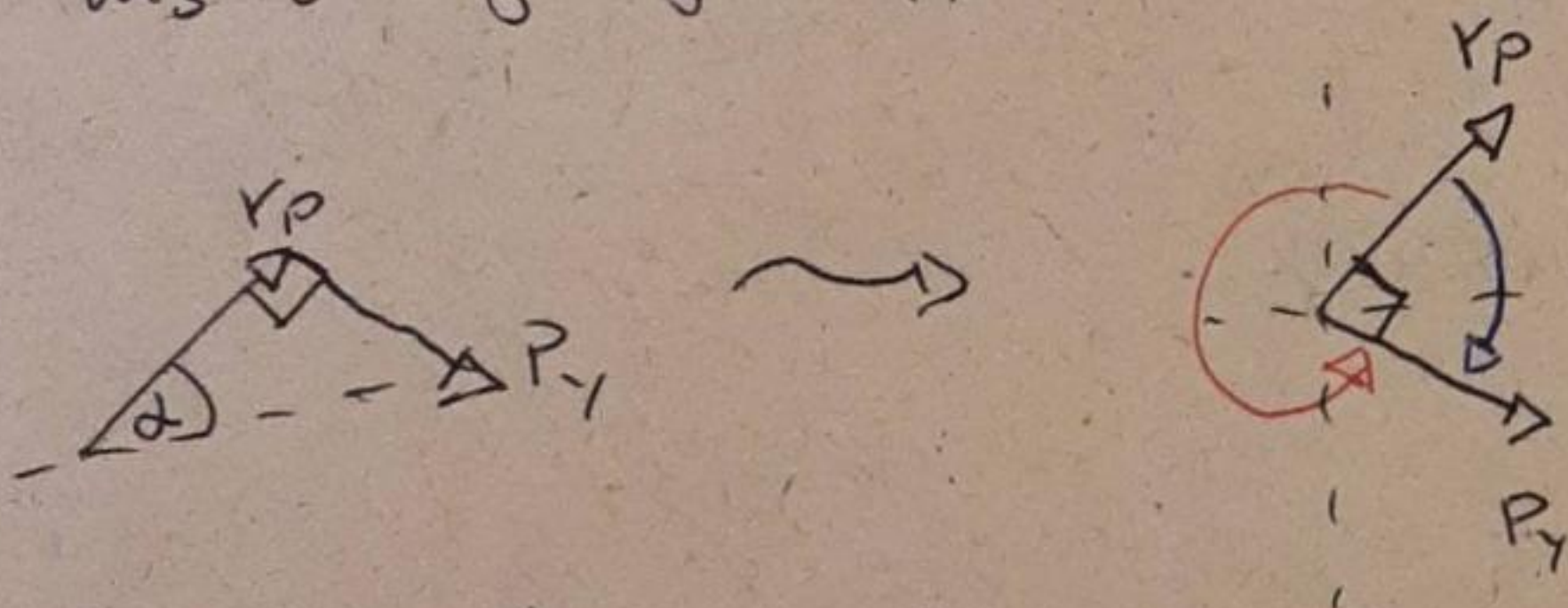
$\Rightarrow$

$$P_x = P \sin \alpha$$

• Debido al hecho que $r_p = r_{Mg}$ y P_x son paralelos (ángulo entre ellos es 0 o π (180°), en este caso es π), P_x no generará Torque, ya que

$$\sin \pi = 0.$$

• El ángulo entre r_p y P_y los sacamos igual que antes. Proyectamos P_y al mismo origen que r_p y conservamos su dirección relativa. Nos queda:



De este modo, podemos calcular θ_p' (ángulo entre r_p y P_y) en dos direcciones:

• Sentido Anti-horario (+): $\theta_p' = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$

• Sentido Horario (-): $\theta_p' = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$

En ambos casos $\sin \theta_p' = -1$ y el Torque queda

$$\tau_p = \tau_{P_x} + \tau_{P_y} = r_p \cdot P_x \cdot \sin \theta_p' + r_p \cdot P_y \cdot \sin \theta_p'$$

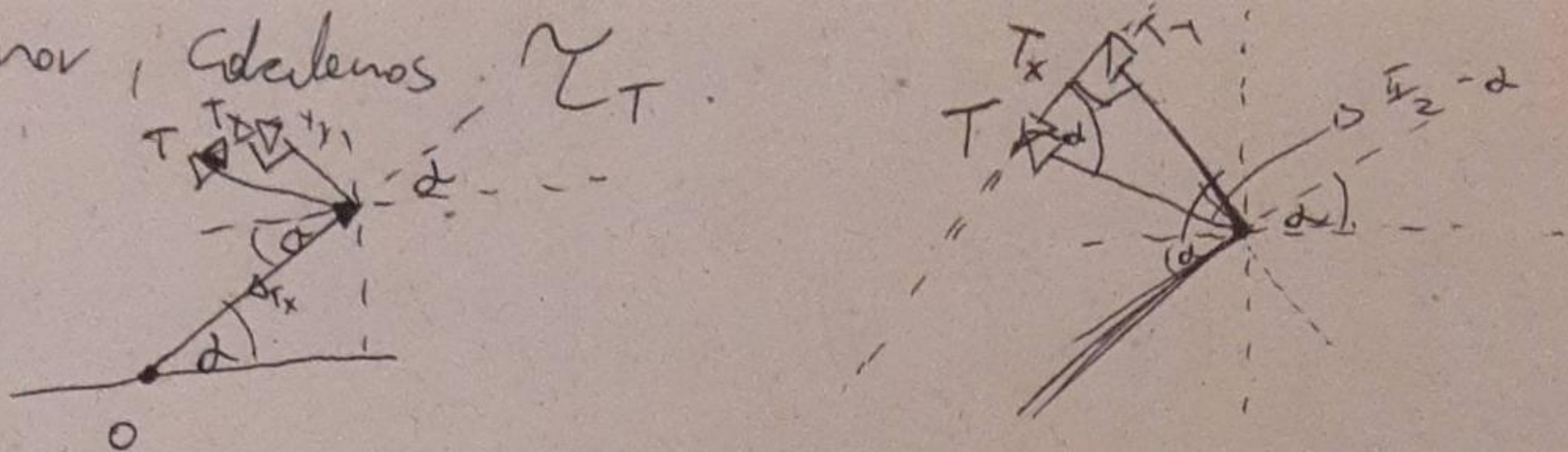
Mismo resultado que antes!

$$\tau_p = r_p \cdot P \cdot \sin \theta_p' = 0 + \frac{L}{2} \cdot \underbrace{(P \cos \alpha)}_{P_y} \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow \tau_p = -\frac{L}{2} \cos \alpha$$

• Para terminar, calculamos τ_T .

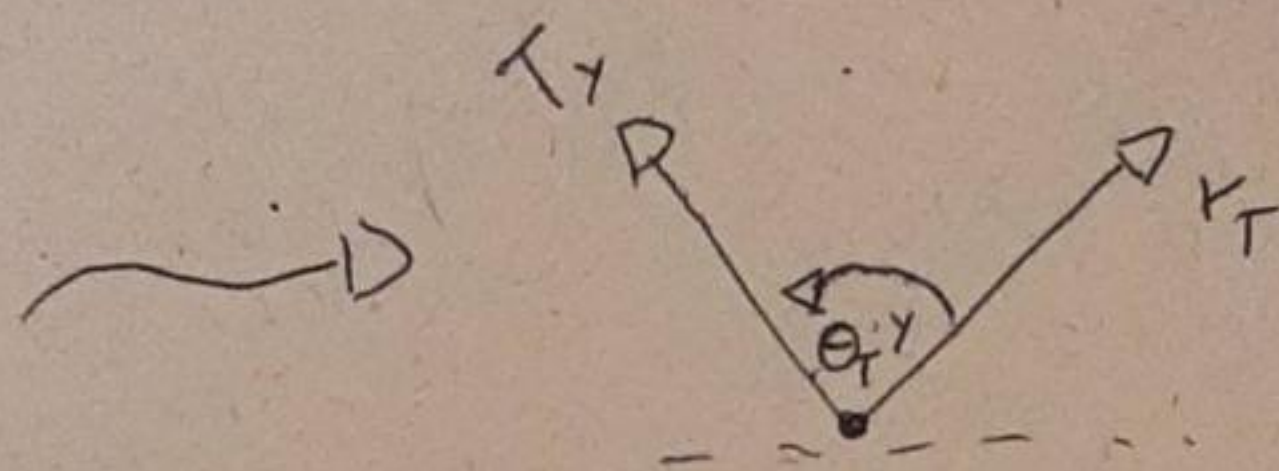
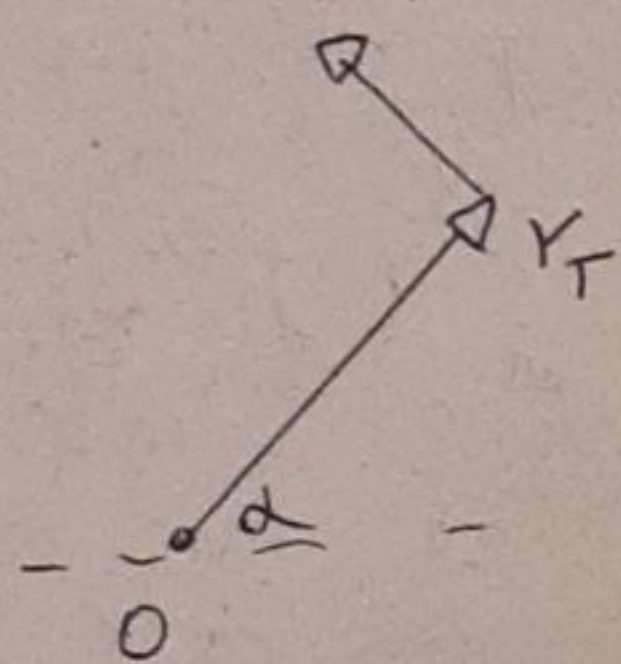
Venos que:



No quedó muy bien el dibujo, pero en el triángulo formado por T , T_x , T_y , el $\angle$ formado por T y T_x es α . Entre T y T_y es $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Entonces concluimos que $T_y = T \sin \alpha$.

Tenemos



Es fácil ver que $\theta_T^y = \frac{\pi}{2}$ o 90° .

$$\theta_T^x = \pi.$$

$$\Rightarrow \tau_T = \tau_{T_x} + \tau_{T_y} = r_T T_x \sin \theta_T^x + r_T T_y \sin \theta_T^y$$

$$\tau_T = r_T \cdot T_x \cdot \sin \pi + r_T \cdot (T \sin \alpha) \cdot \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\tau_T = L \cdot T \sin \alpha$$

Sumamos todos los torques

$$\sum \tau = \tau_P + \tau_P + \tau_T = -\frac{L}{2} M g \cos \alpha + L T \sin \alpha$$

$$\text{Como } \sum \tau = 0 \Rightarrow \boxed{L T \sin \alpha - \frac{L}{2} M g \cos \alpha = 0}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow \sum F_y = 0$$

• Para terminar el ejercicio, hay que calcular $\sum F = 0$

• Hacer un DCL para m y despejar T

• Usar $M = 2m$ y, con los 3 ecuaciones, despejar α .