



Roberto Cárdenas Dobson, Msc. Ph.D
Profesor Titular, U. Chile

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile





Fundamentos de Control Digital

(algunas transparencias pertenecen a las clases de la Prof. Constanza Ahumada)



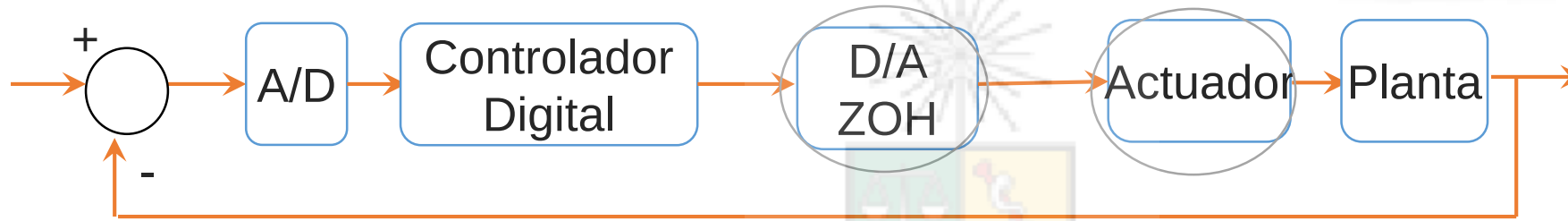
Sistemas Discretos

- Tiempo Continuo

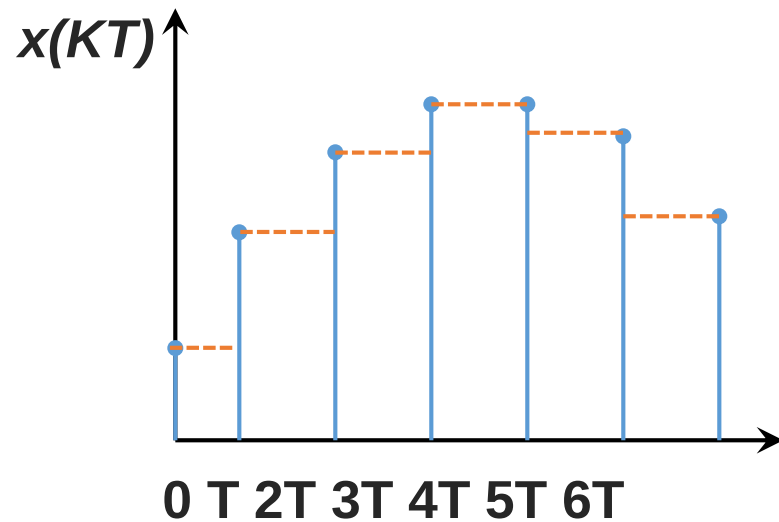


- ¿Qué diferencia la implementación digital de la analógica?
 - Se debe trabajar en tiempo discreto
 - Se reemplaza hardware por software.
 - La misma plataforma puede implementar distintos controladores.

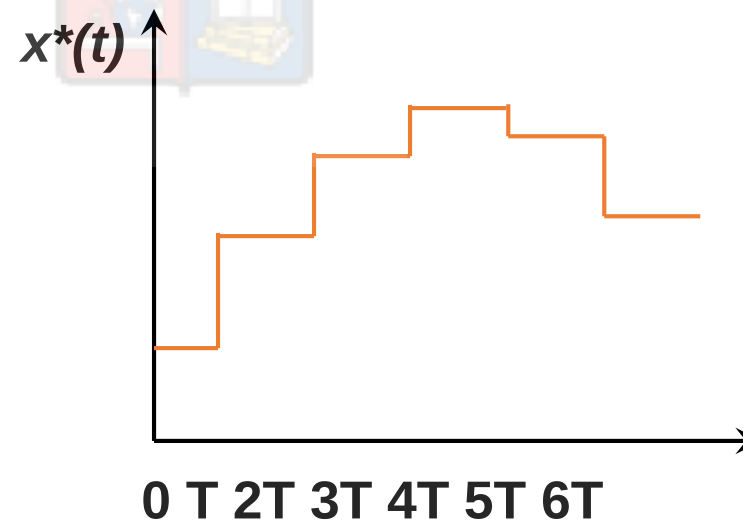
Sistemas Discretos



Entrada ZOH



Salida ZOH



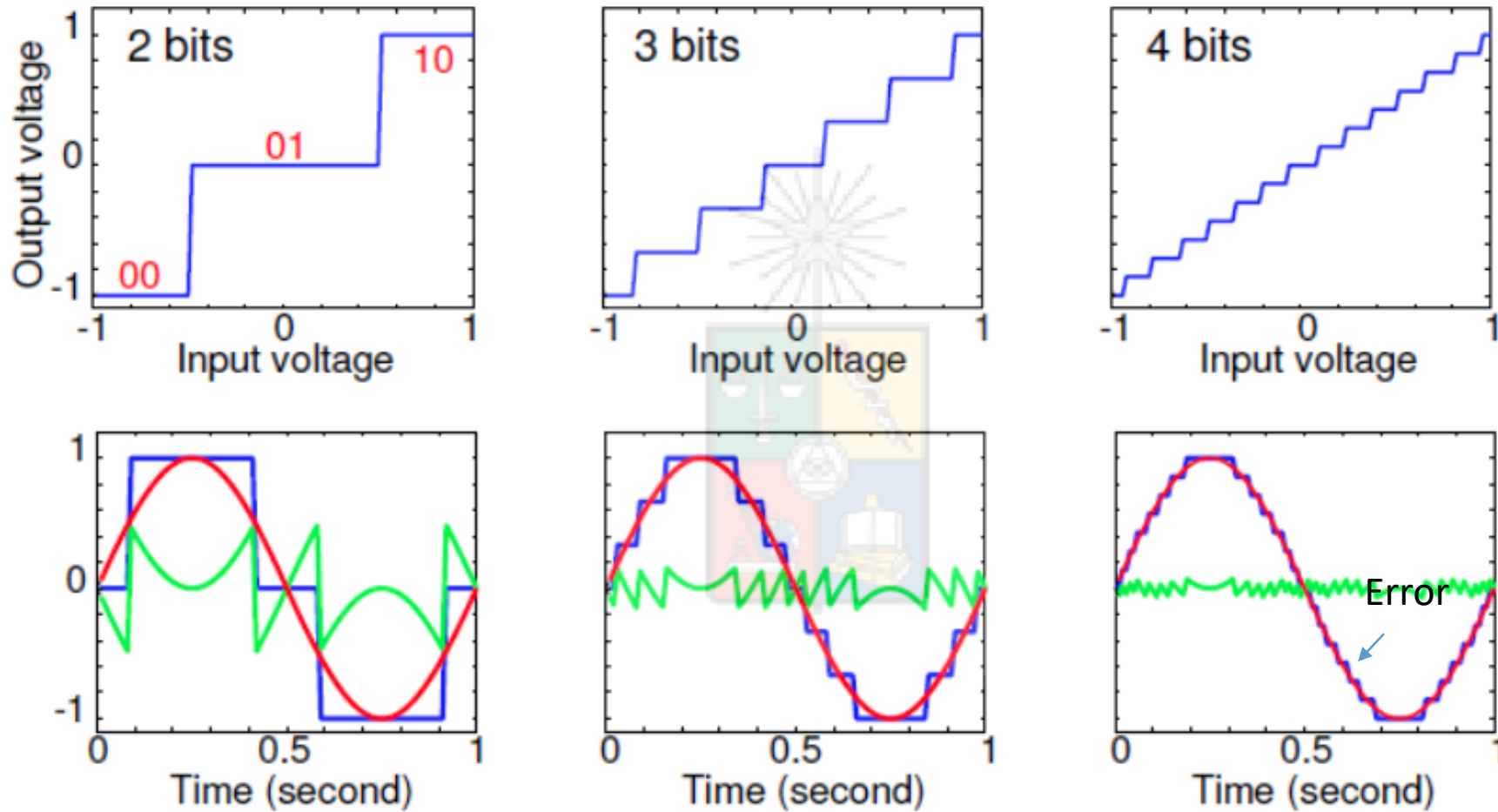
ZOH=zero order hold

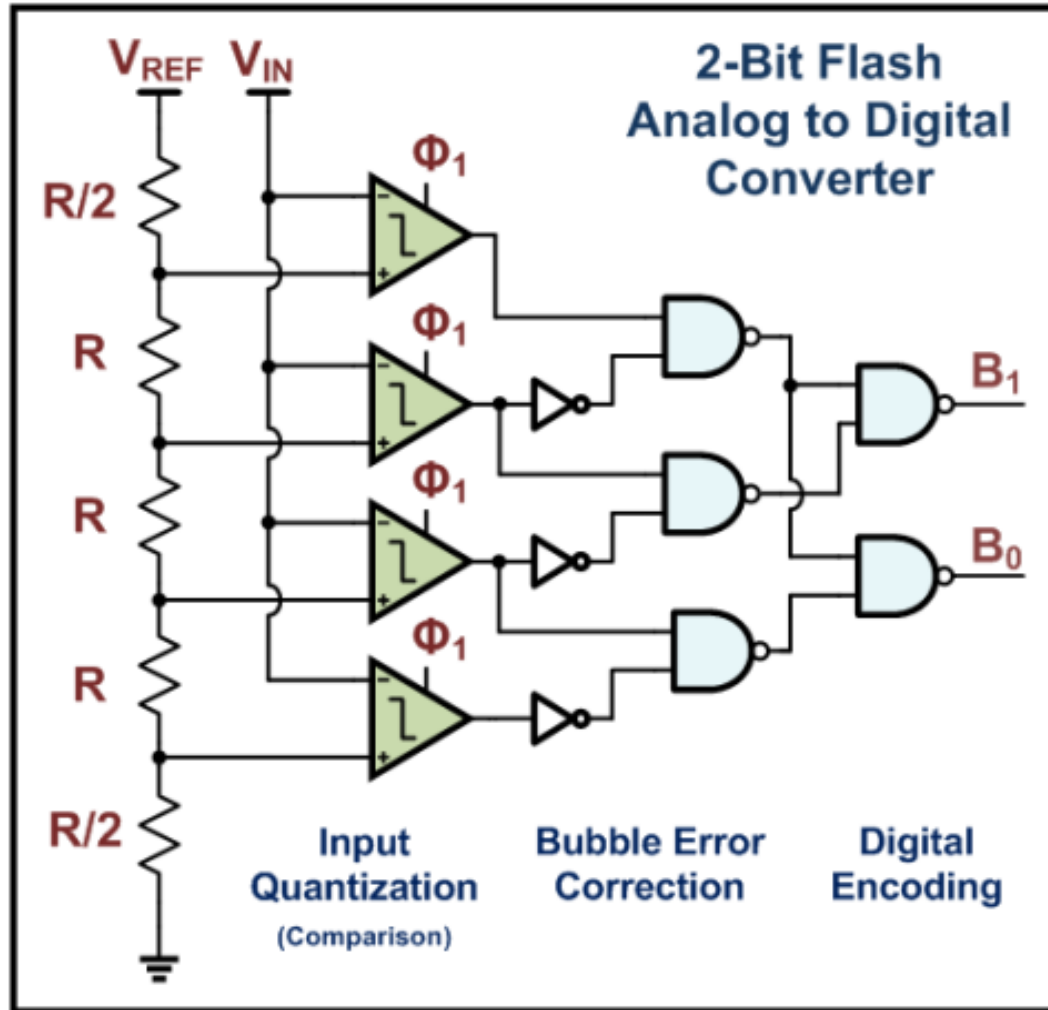
- La mayoría de las plantas son analógicas. Por lo tanto para fines de control se debe llevar la representación analógica de las variables (corrientes, tensiones temperaturas, etc.) a una representación digital. Para esto se utiliza habitualmente un dispositivo denominado “sample and hold” (opcional) y un conversor análogo/digital.
- A diferencia de la típica electrónica que opera habitualmente en el orden de los nanosegundos (TTL, amplificadores operacionales) un conversor A/D opera usualmente en el orden de los microsegundos. Se debe tomar en cuenta que:
 - a) Un A/D no puede considerarse instantáneo. Tiene un tiempo de conversión asociado entendiéndose éste como el tiempo que existe entre que ingresa la señal analógica $u(t)$ y su conversión $u(kT)$. Este tiempo no debe ocupar una fracción alta del período de muestreo.
 - b) La representación digital no es exacta. Depende de la resolución del conversor. Por ejemplo un conversor de 8 bits (considerado de baja resolución), tiene 2^8 “tramos” para representar una medición. Por lo tanto si se requiere medir una corriente del orden de 50A, recuerde que este conversor A/D no puede diferenciar entre una corriente de 50.1A y 50.2A.

Discretización de señales

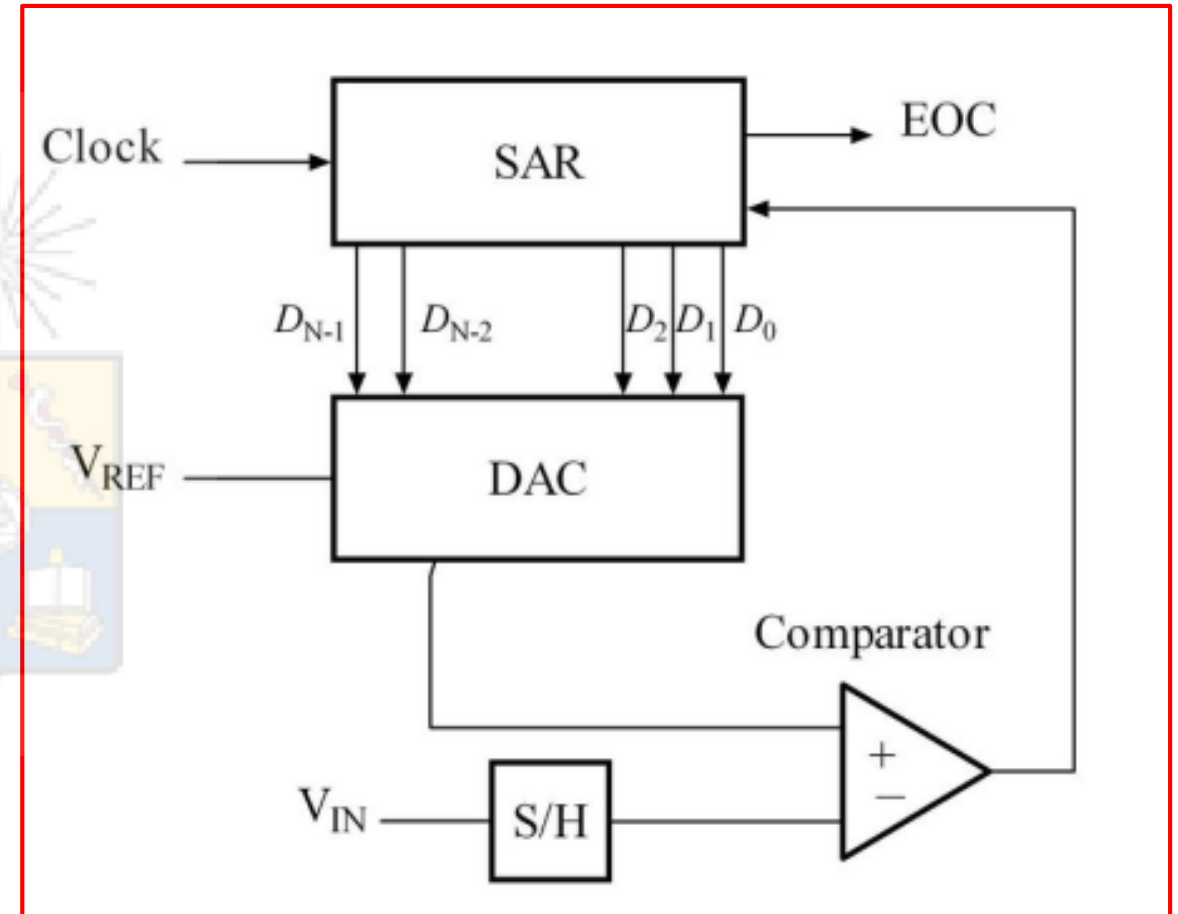


UNIVERSIDAD DE CHILE



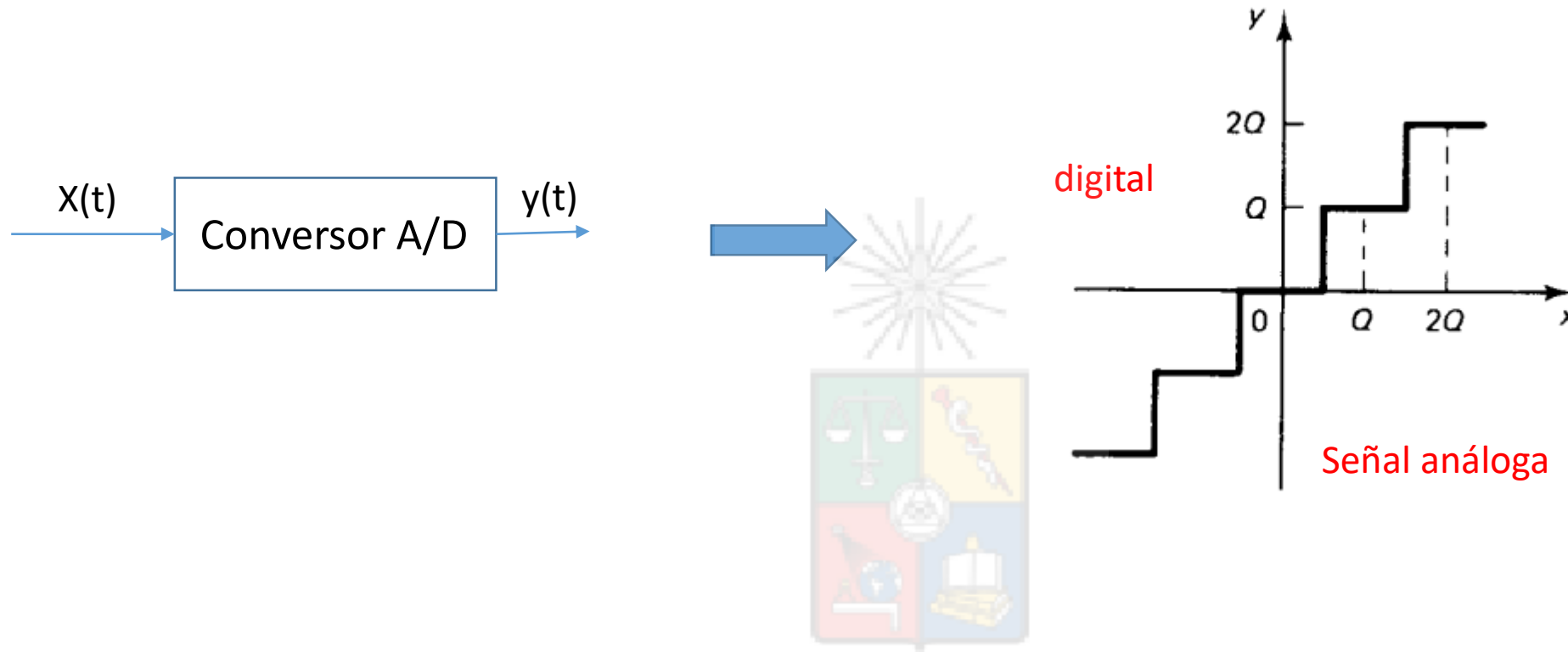


Flash. Alta velocidad y habitualmente baja resolución



Aproximaciones sucesivas. Habitualmente basado en búsqueda binaria

Efectos del Error de Cuantificación

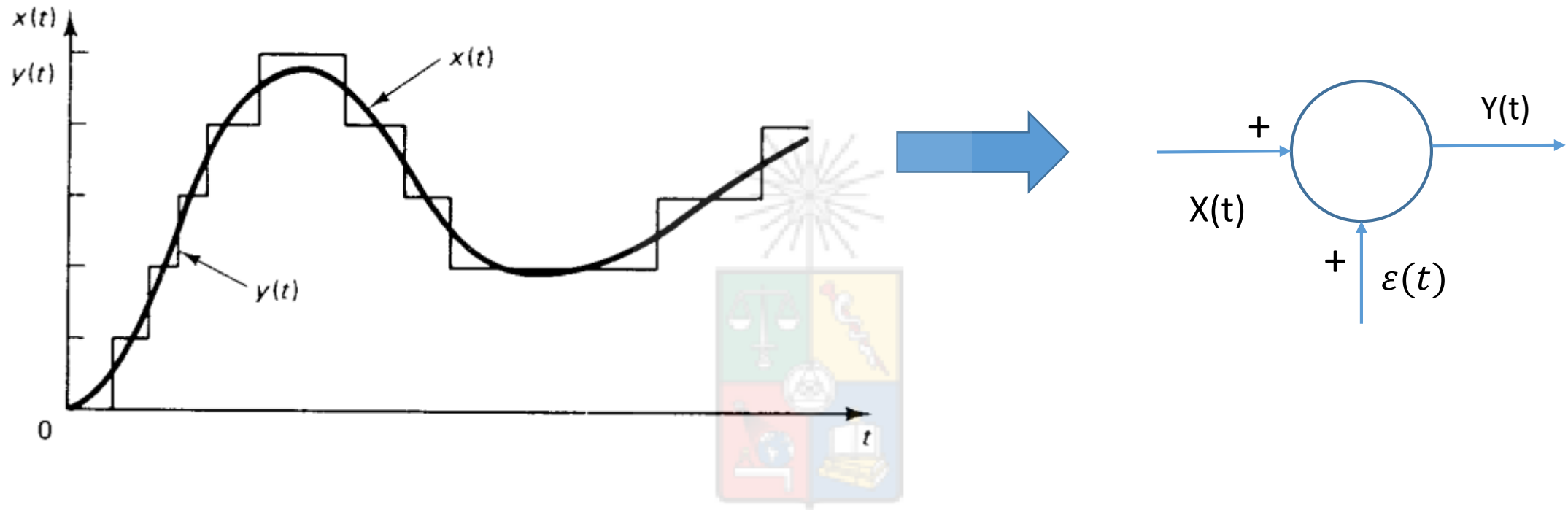


El conversor A/D tiene la misma representación digital para todos los valores digitales que están entre, por ejemplo, Q y $2Q$. Por ese motivo, mientras menor sea la resolución del conversor, mayor es el error de representación.

Efectos del Error de Cuantificación



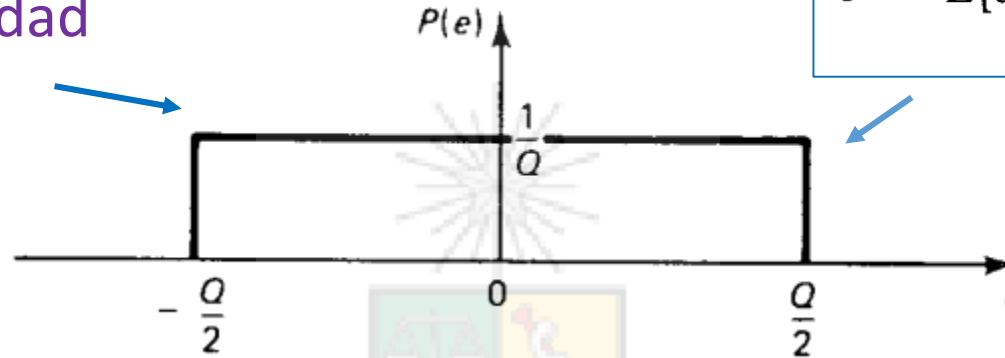
UNIVERSIDAD DE CHILE



- El efecto de la resolución del conversor A/D, mostrado en la figura de la izquierda, es equivalente a ingresar al sistema de control la señal medida o real, mas un error que está entre $\pm \frac{Q}{2}$, donde Q es la resolución del conversor.

Representación del error.

Distribución de probabilidad
uniforme



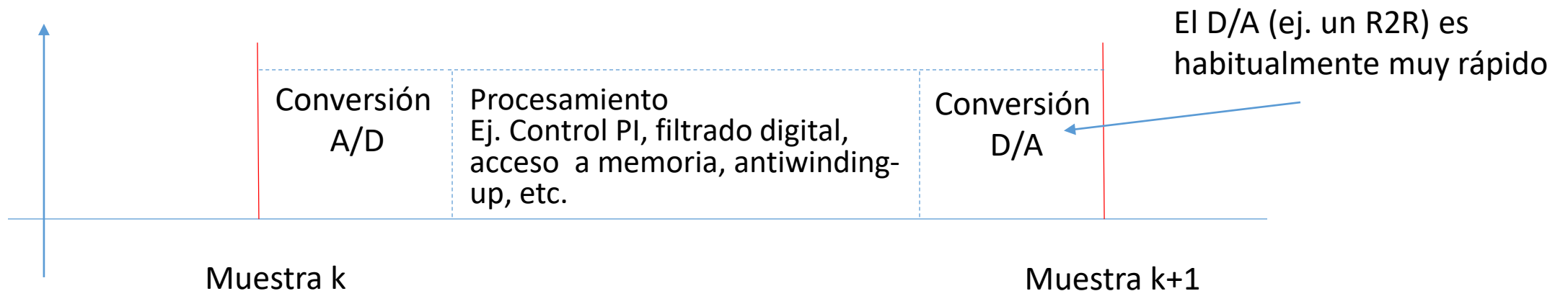
$$\sigma^2 = E[e(t) - \overline{e(t)}]^2 = \frac{1}{Q} \int_{-Q/2}^{Q/2} \xi^2 d\xi = \frac{Q^2}{12}$$

- El error de cuantificación se representa habitualmente como una distribución de probabilidad uniforme, donde todos los valores $\varepsilon(t)$ entre $\pm \frac{Q}{2}$ tienen la misma probabilidad de ocurrir. Esto es equivalente a representar el error de cuantificación como un ruido blanco en la medición. Si el valor de Q es alto, el ruido de cuantificación se propaga por el sistema de control.

(más información en Discrete Time Control Systems, K. Ogata, Prentice Hall Inc.)

Conversión A/D

- En aplicaciones de control de máquinas y electrónica de potencia, habitualmente se utilizan conversores A/D de 12 bits o mayor resolución. Dado que las variables eléctricas son rápidas, típicamente se utilizan A/D con velocidades de conversión menores (y a veces bastante menores) a $10\mu\text{s}$.
- ¿Como se puede determinar si el conversor es adecuado?. No puede ocupar una fracción muy significativa del tiempo de muestreo.

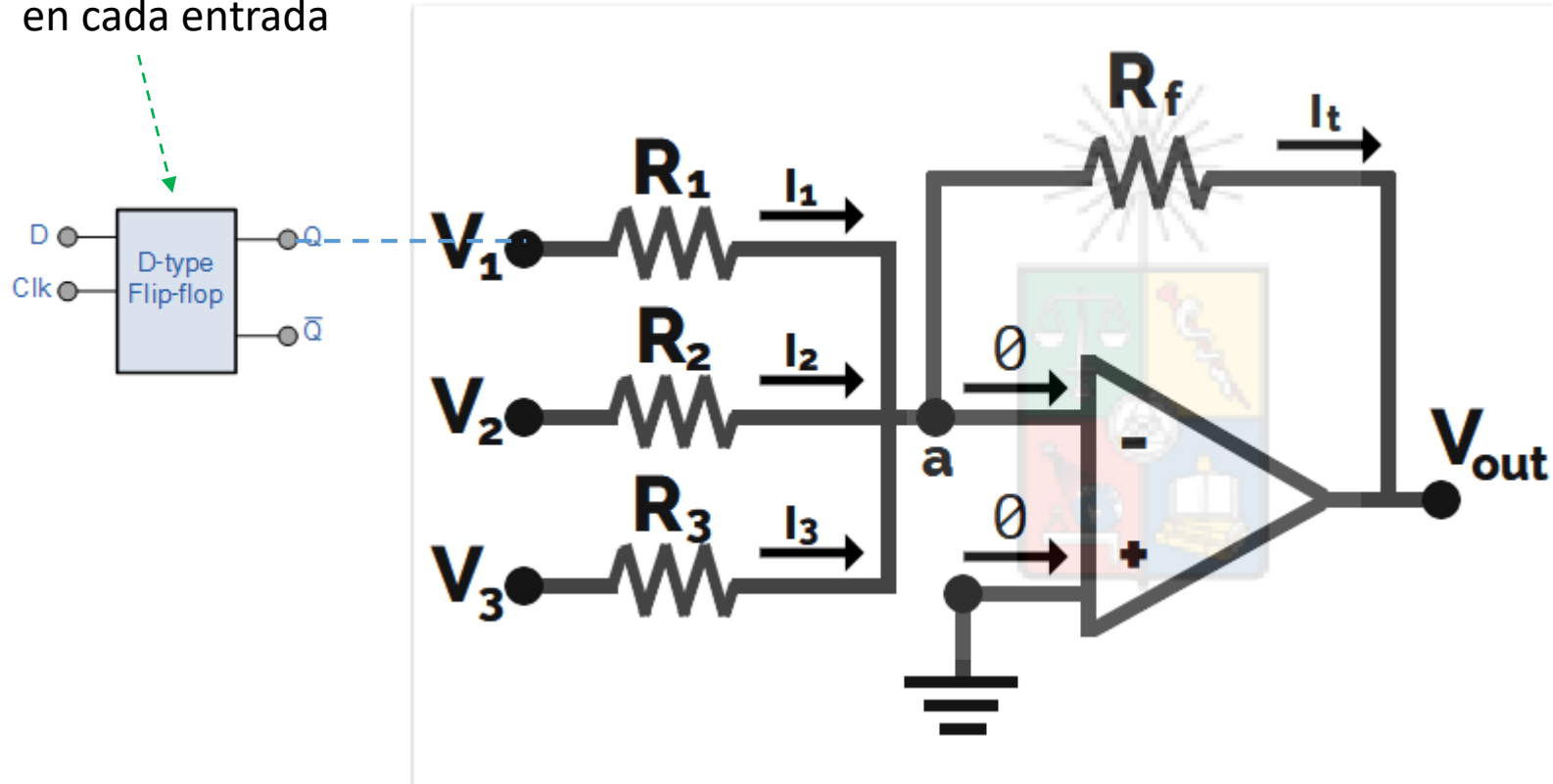


Conversor D/A (no es un R2R)



UNIVERSIDAD DE CHILE

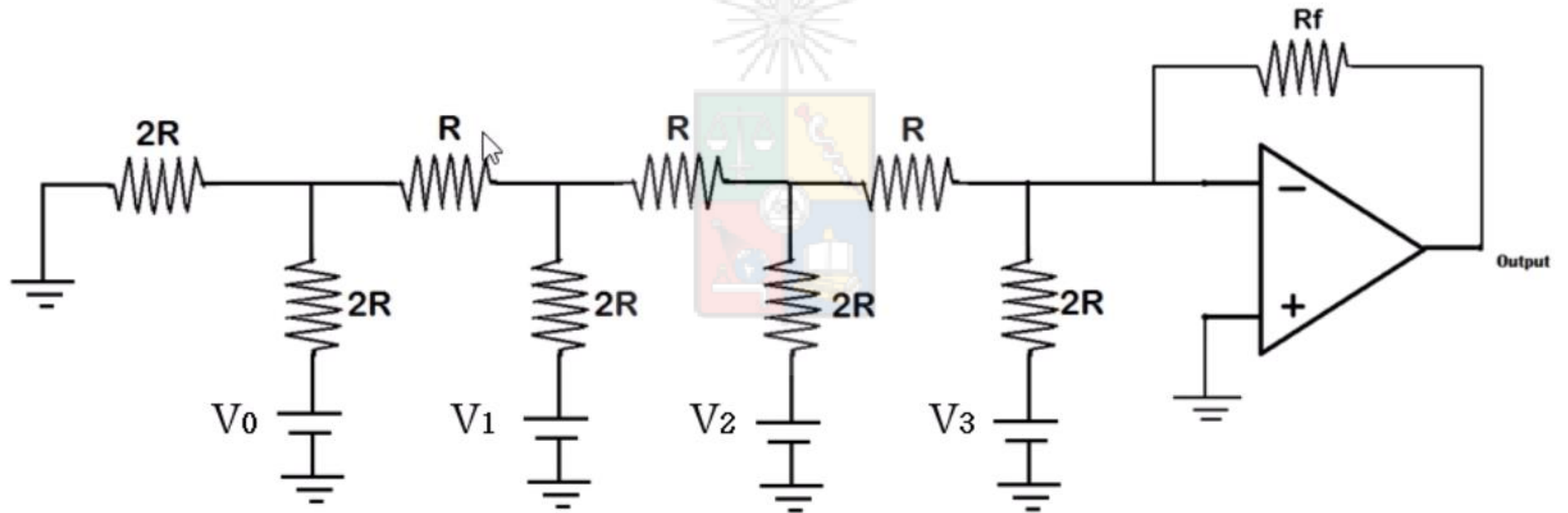
Se tiene un "Latch
en cada entrada



$$V_{out} = -R_f \left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} \right)$$

Conversor R2R

Mismo principio de funcionamiento, pero utilizando solo dos valores de resistencia en su implementación



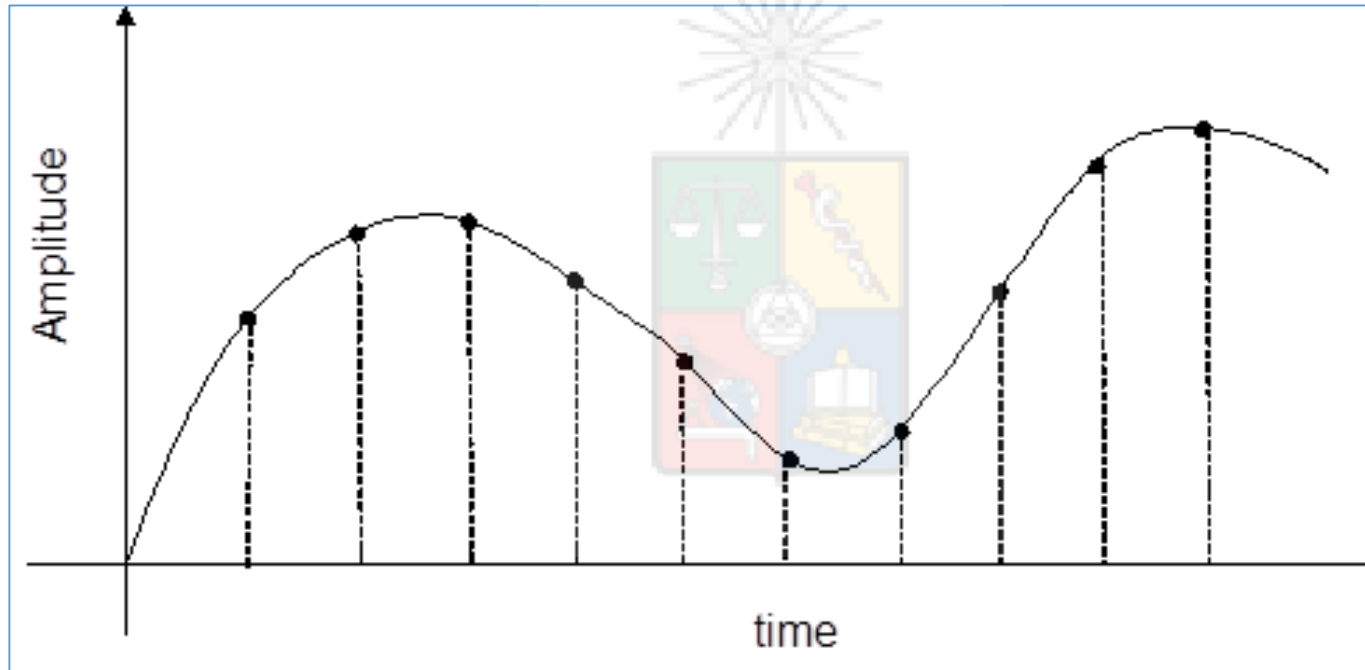
Diseño de sistema de control discreto

- ¿Cuál es la correcta frecuencia de muestreo para diseño exacto?. Esta pregunta no es fácil de responder. Habitualmente el mínimo está determinado por el teorema del muestreo de Nyquist-Shannon.
- Este establece que para poder reconstruir una señal digital se debe muestrear a dos veces la frecuencia mas alta del sistema. De lo contrario se produce aliasing.

También es necesario que la frecuencia de muestreo sea 10 o más veces superior a la respuesta de frecuencia de la planta. Esto permite que los armónicos producidos por el ZOH sean eliminados.

Más sobre la velocidad de Nyquist-Shannon

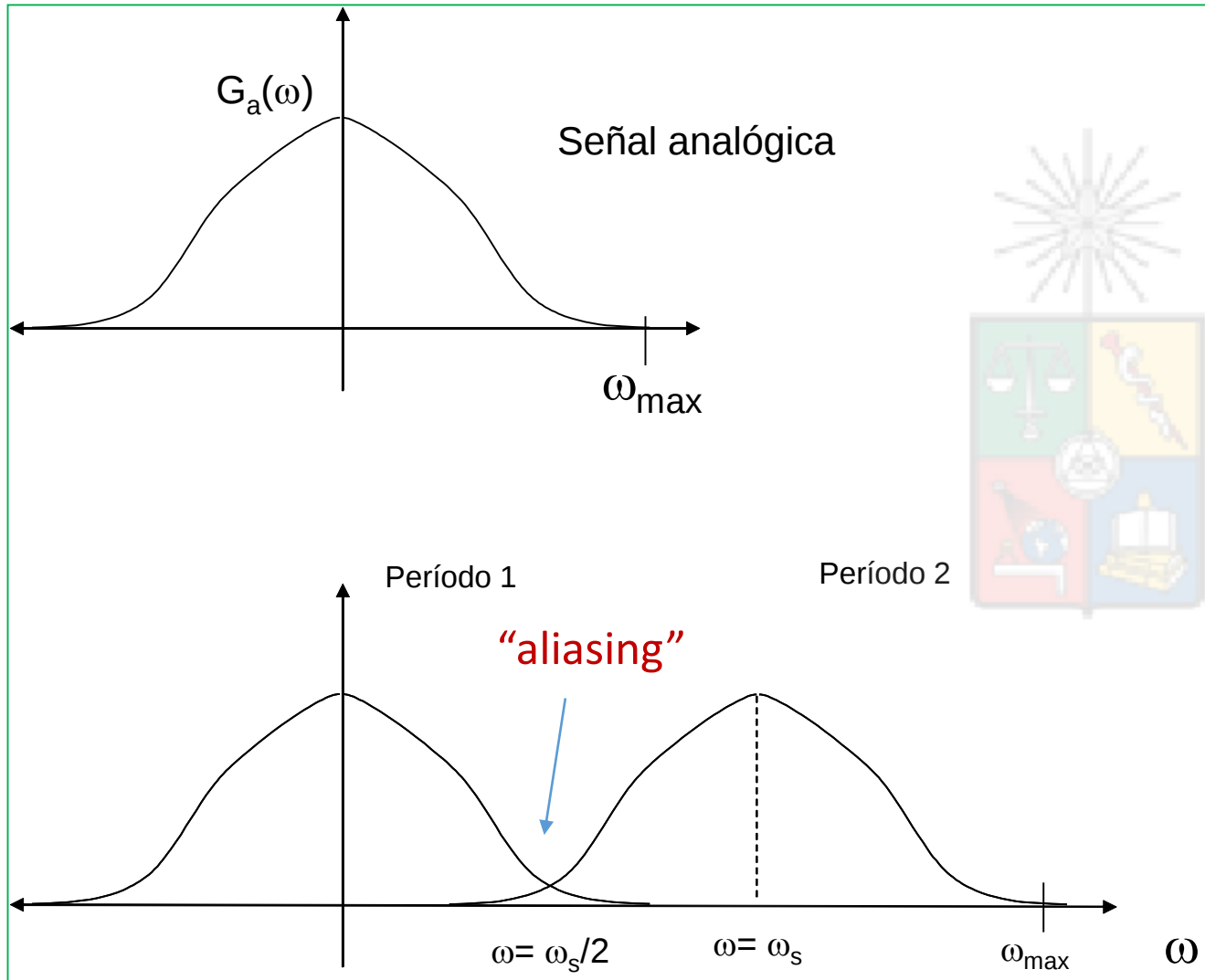
- El espectro de una señal digital es periódico.



$$G(\omega) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n e^{-jn\omega T_s} = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n e^{-j2\pi\omega / \omega_s} n$$



Más sobre la velocidad de Nyquist-Shannon



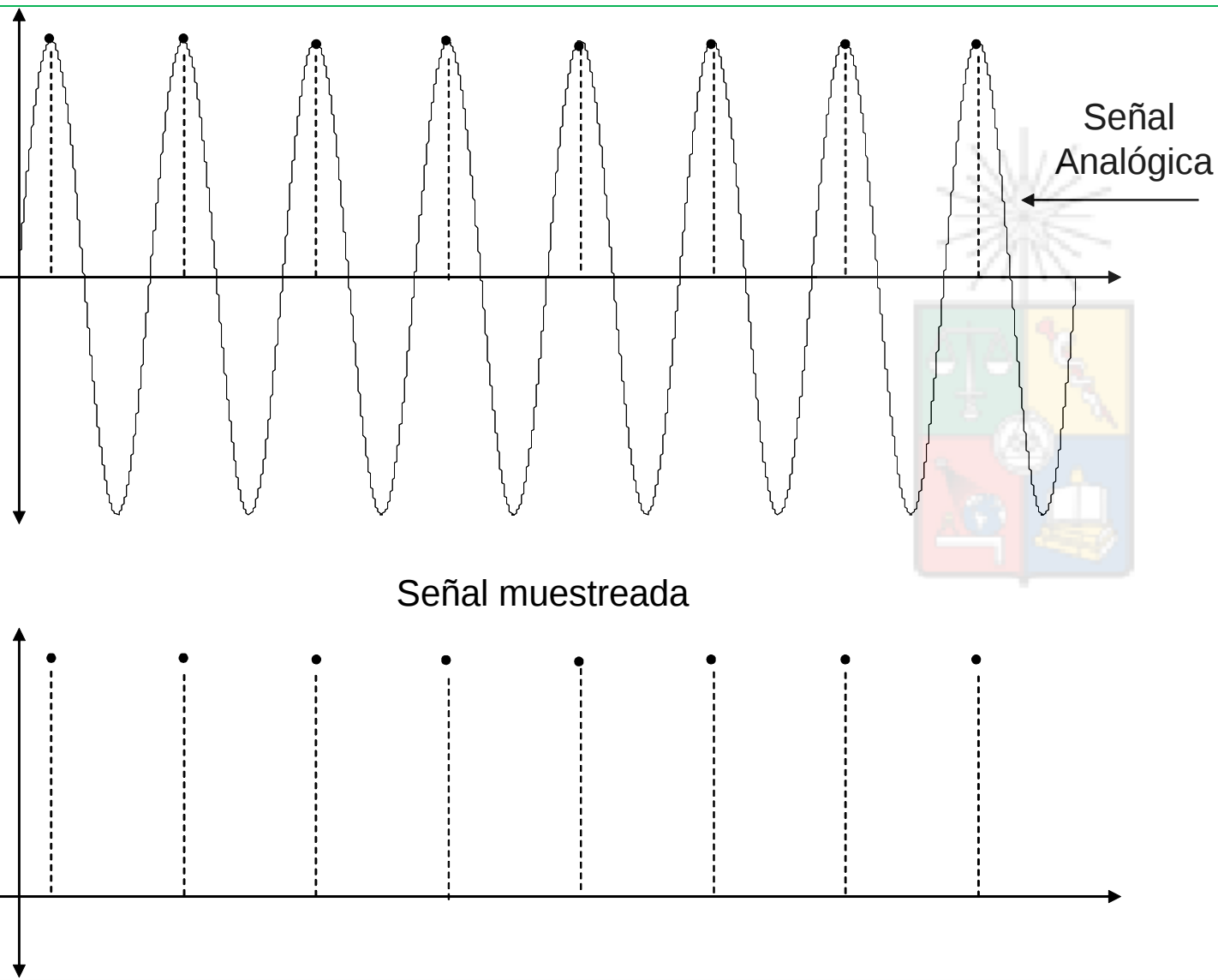
Aliasing

El aliasing se produce cuando, debido a una incorrecta frecuencia de muestreo, señales de la parte alta de un período espectral se mezclan con señales de la parte baja de otro período espectral.

Esto significa que el procesador no puede distinguir una frecuencia de la otra.



Más sobre la velocidad de Nyquist-Shannon

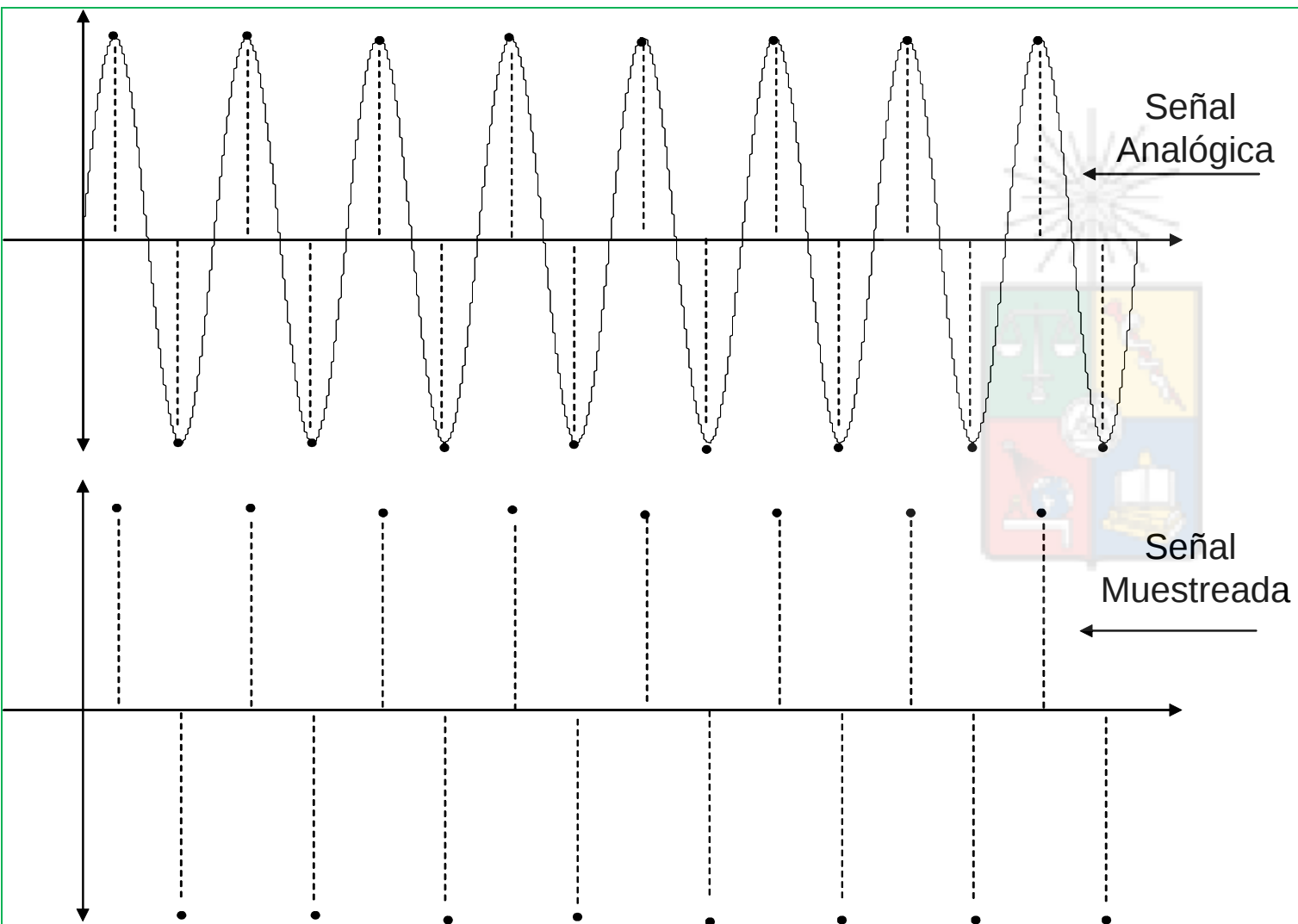


Al muestrear la sinusoidal incorrectamente, el procesador obtiene una señal de corriente continua.

¿Cuál son los problema derivados de esto?

- 1) El sistema de control implementado en el procesador no puede controlar una señal que no puede “ver”. En este caso el regulador no puede controlar la señal sinusoidal.
- 2) El procesador no puede diferenciar entre la continua real y la continua producida en el proceso de aliasing.

Velocidad de Muestreo



Al muestrear la onda sinusoidal de frecuencia ω_e con una frecuencia $2\omega_e$, se ingresa al procesador una onda cuadrada.

¿Se puede recuperar la onda sinusoidal a partir de esta onda cuadrada?. Si se puede.

¿Cómo se hace?. El teorema de Shannon no se preocupa de esto, lo que indica es la condición necesaria para la que onda original pueda ser recuperada. A partir de eso es su problema recuperarla.

Es decir el teorema de Shannon indica cual es la mínima frecuencia necesaria. Habitualmente en los sistemas de control se utilizan frecuencias de muestreo bastante superiores.

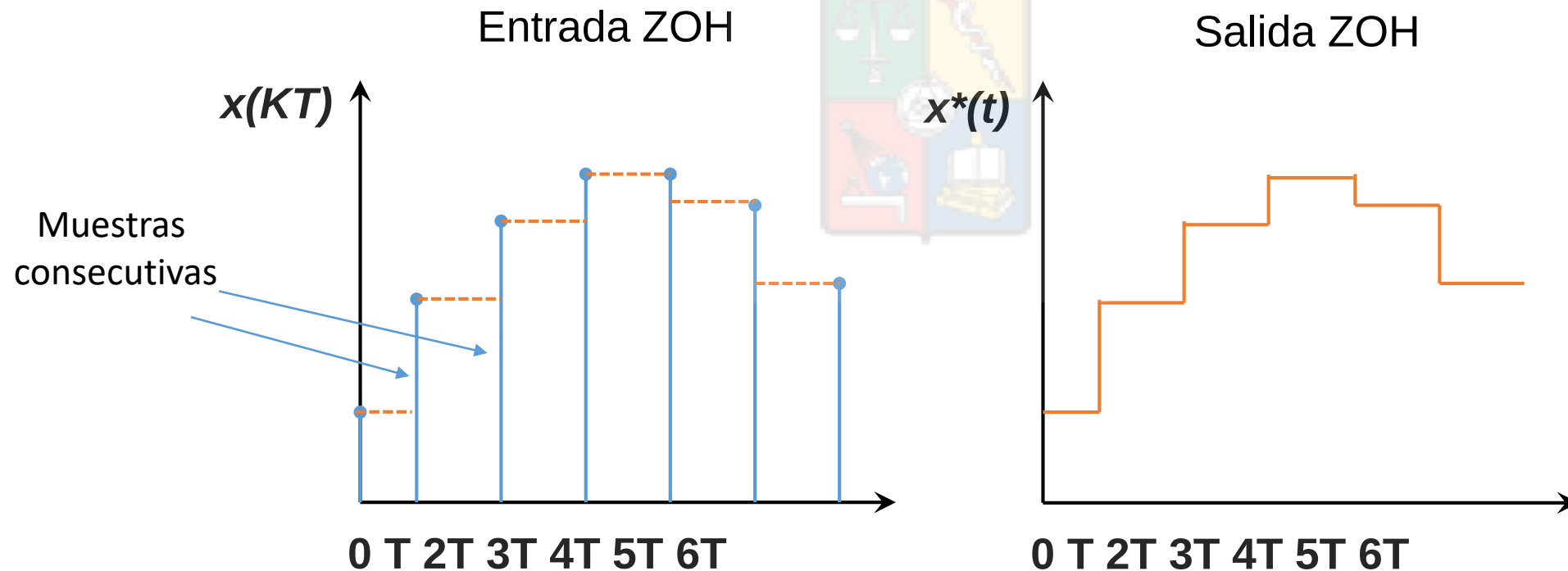


Teorema del Muestreo de Nyquist-Shannon

- ¿Cual es la frecuencia mas alta del sistema?. No necesariamente se conoce, pero se puede estimar utilizando el ancho de banda del sistema (que no necesariamente es lo mismo que la frecuencia natural). El resto se puede eliminar utilizando un filtro antialiasing.
- La velocidad de Nyquist es solo una condición necesaria pero no siempre suficiente.
- En mi experiencia en control de máquinas, se debe utilizar una frecuencia de muestreo de al menos 5-10 veces el valor de la frecuencia natural para obtener un diseño adecuado (yo me inclinaría por utilizar al menos 10 veces como mínimo)
- Eso no es un gran problema en la actualidad. Los procesadores son de bajo costo y alta velocidad de respuesta.

El teorema fue realmente descubierto por E.T. Whittaker, matemático británico, en 1915, por eso en algunas publicaciones se denomina teorema de Whittaker-Nyquist-Shannon.

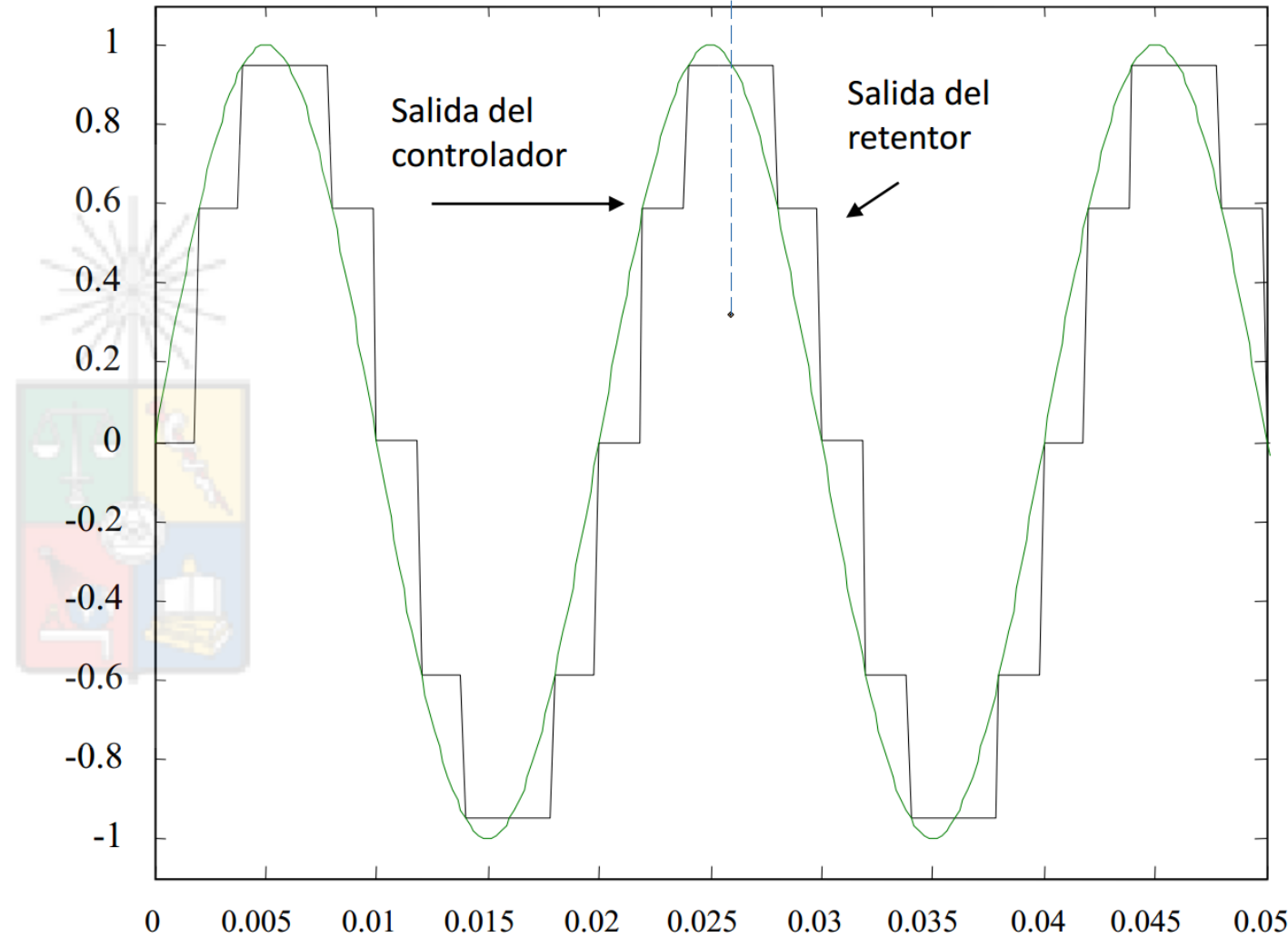
- El conversor D/A es un componente de alta velocidad de respuesta (comparado con el A/D) y cumple la función de retentor de orden cero. También se le denomina reconstructor de orden cero.





Efectos del Retentor de Orden Cero

- El retentor produce un retardo de transporte de $\frac{1}{2}$ muestra aproximadamente.
- El retentor produce armónicos. En la figura la señal analógica es una sinusoidal pura. Si se analizan los componentes de frecuencia a la salida del retentor se tiene la sinusoidal más armónicos de alta frecuencia (en el rango de $1/T$) producidas por las ondas escalonadas.
- La planta es habitualmente un filtro pasa-bajo. Si el sistema está bien diseñado los armónicos son eliminados por la planta.





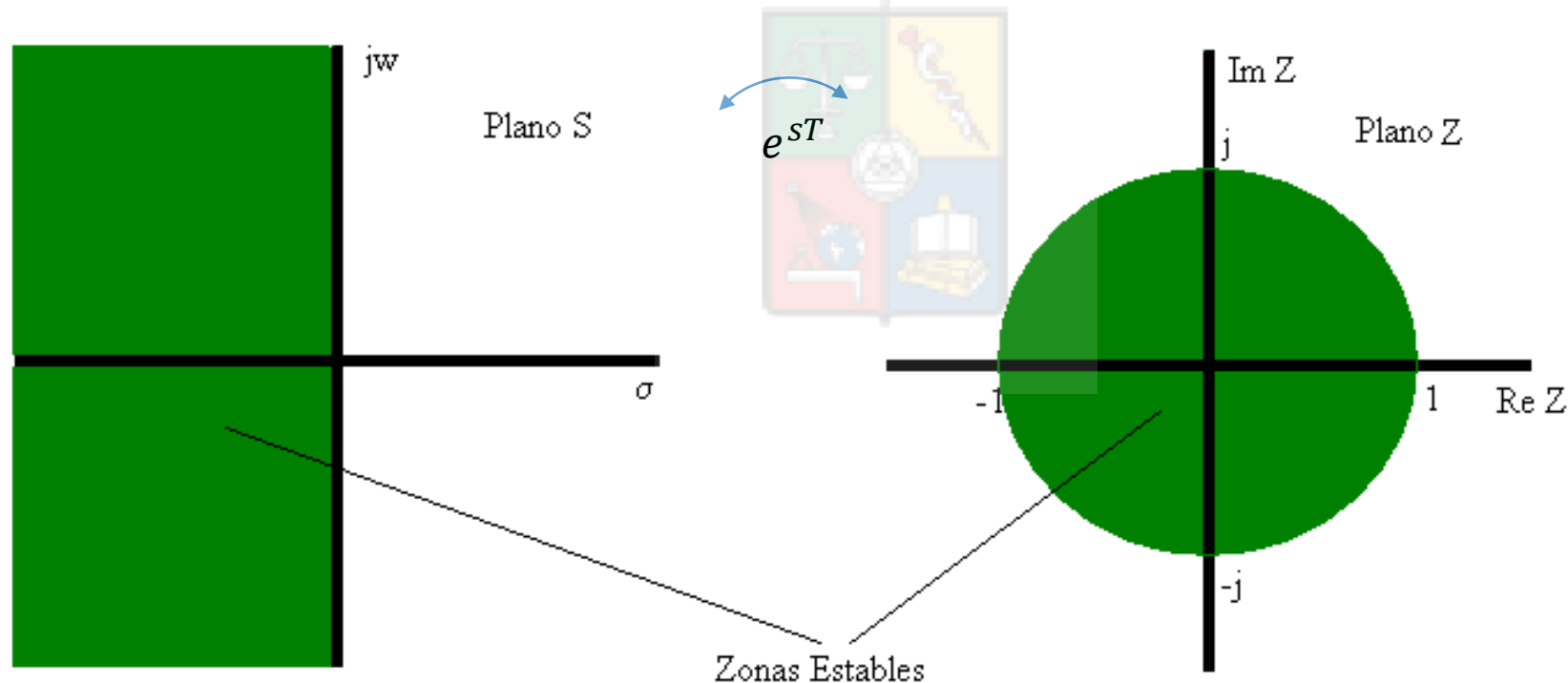
Repaso

Diferencias entre Z y S

Plano Z - Polos y Ceros Discretos

- Transformación del plano s a z:

Se define: $z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} (\cos \omega T + j \sin \omega T)$



Diagramas de Argand en 4 dimensiones. Dos para el dominio y dos para el recorrido



Plano Z - Polos y Ceros Discretos

- Plano $s = \sigma + j\omega$

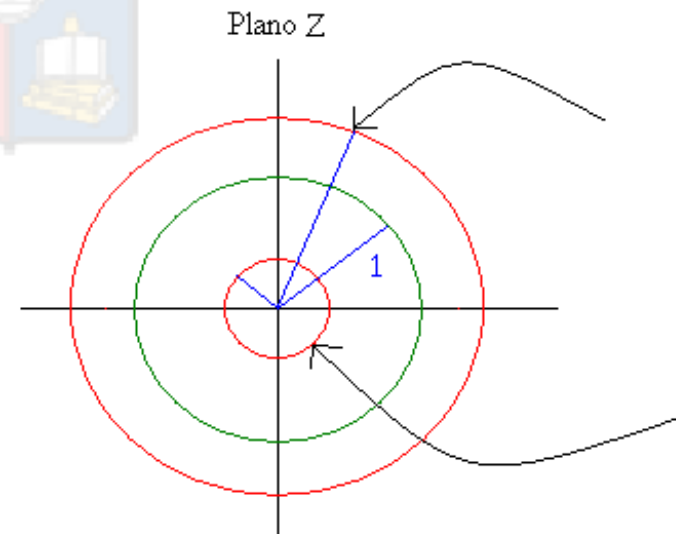
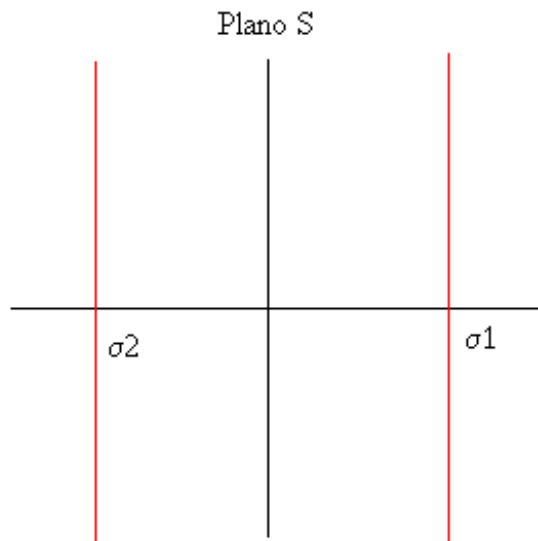
- $s = j\omega \Rightarrow z = e^{j\omega T} \Rightarrow |z| = 1$

- $s = 0 \Rightarrow z = e^{0T} \Rightarrow z = 1$

- $s = -\infty \Rightarrow z = e^{-\infty T} \Rightarrow z = 0$

- $\sigma < 0 \Rightarrow z = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \Rightarrow |z| < 1$

Plano Estable





Transformada Z de funciones simples

- Por ejemplo, supongamos que se quiere encontrar la transformada Z de un escalón unitario. Recuerde que $z = e^{sT}$ donde T , a veces denominado T_s en este curso, es el tiempo entre muestra y muestra.

$$x(t) = 1 \quad \forall t > 0 \rightarrow X(z) = \sum_0^{\infty} z^{-k}$$

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots z^{-n}$$

$$z^{-1}X(z) = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots z^{-n}$$

$$X(z)(1 - z^{-1}) = 1 \rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Transformada Z de una rampa Unitaria

- La función de transferencia de una rampa unitaria es: $x(t) = \forall t > 0$.

$$X(z) = \sum_0^{\infty} KTz^{-k}$$

$$X(z) = T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \dots)$$

$$z^{-1}X(z) = T(z^{-2} + 2z^{-3} + 3z^{-4} + 4z^{-5} + \dots)$$

$$X(z)(1 - z^{-1}) = Tz^{-1}(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots)$$

- De la diapositiva anterior, se puede reemplazar $T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \dots)$ Por la transformada del escalón unitario. Por lo tanto:

$$X(z) = T \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z - 1)^2}$$

Teorema del Valor Inicial y Valor Final



UNIVERSIDAD DE CHILE

Teorema del valor inicial

$$\lim_{k \rightarrow 0} X(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Teorema del valor Final

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z)$$

Al igual que en el caso continuo, el teorema del valor final usualmente se utiliza para calcular los errores en estado estacionario.



UNIVERSIDAD DE CHILE

Principio del Modelo Interno



- El principio del modelo interno se aplica de la misma forma que en el caso continuo. Para eliminar el error en estado estacionario se debe repetir el denominador, de cada polo que produce respuesta permanente, en el controlador.
- Por lo tanto para obtener cero error en estado estacionario a entrada escalón se debe implementar un término $(z - 1)$ en el denominador del controlador.
- Para cero error en estado estacionario a entrada rampa se debe utilizar $(z - 1)^2$ en el denominador del controlador.

Plano Z - Transformada Z

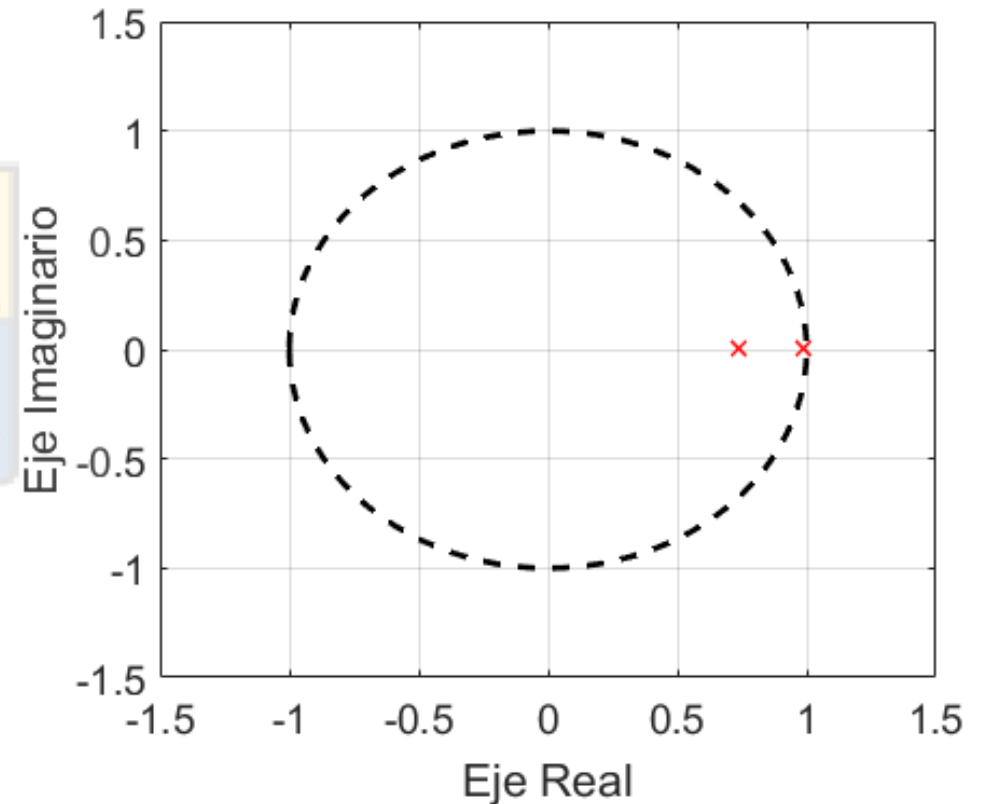
Entrada	$X(s)$	$X(t)$	$X(kT)$	$X(z)$
Escalón	$\frac{1}{s}$	1	1	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$
Exponencial	$\frac{1}{s + a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{1 - e^{aT} z^{-1}}$
Rampa	$\frac{1}{s^2}$	t	kT	$\frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$
Delta	1	$\delta(t)$	$\delta(k)$ $1 \ k = 0$ $0 \ k \neq 0$	1
Delta Desplazado	-	-	$\delta(n - k)$ $1 \ n = k$ $0 \ n \neq k$	z^{-k}

Plano Z - Polos y Ceros Discretos

- Polos continuos: $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$
- Polos discretos: $z_{1,2} = e^{T(-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2})}$

¿Qué representa la figura?

- Hay 2 polos dentro del círculo unitario, por lo que el sistema es estable.
- Los 2 polos son distintos, por lo que es un sistema sobreamortiguado.

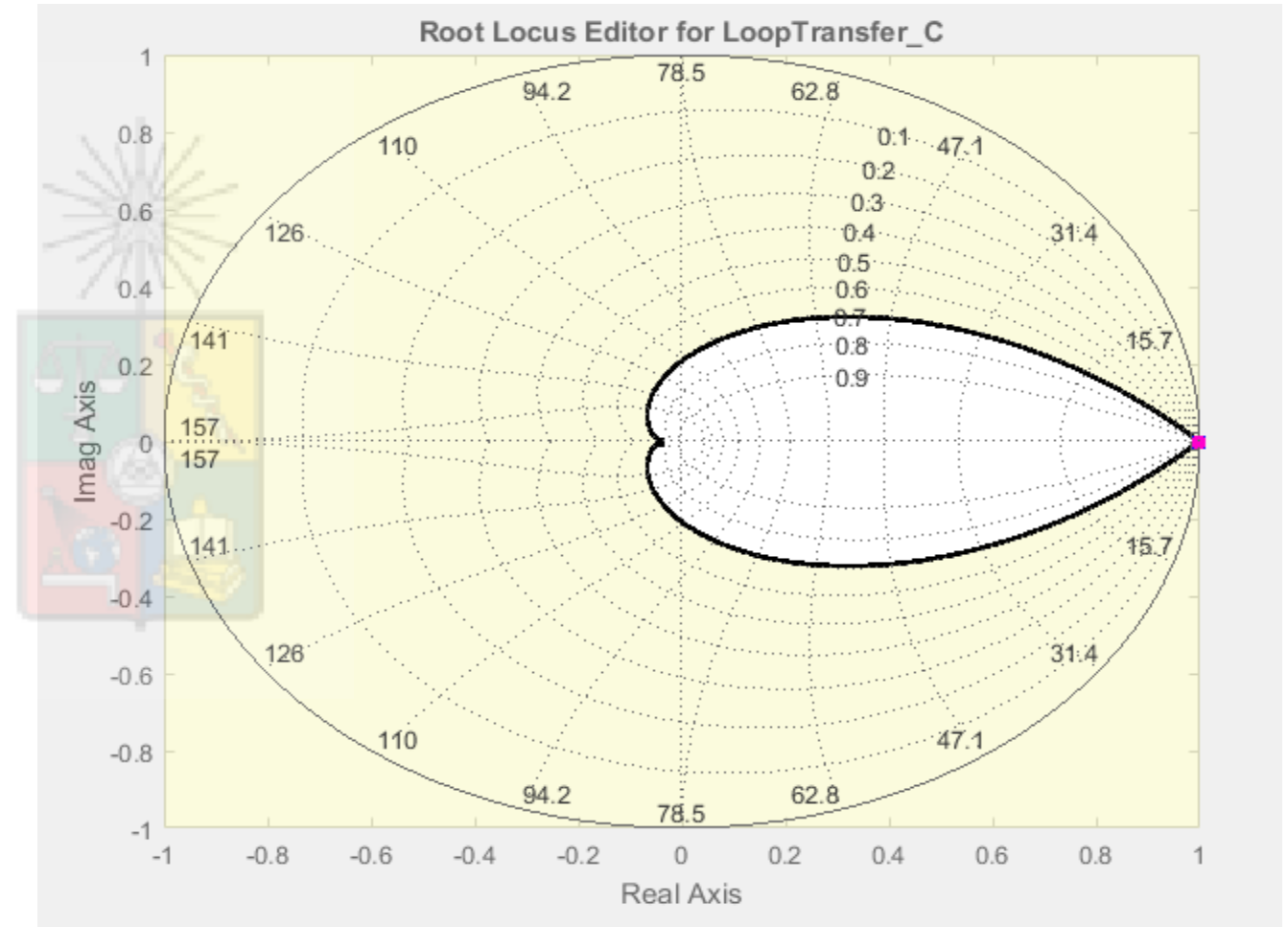


Plano Z – Obtención de ζ en el plano Z

Plano S

e^{sT}

Línea de ζ constante

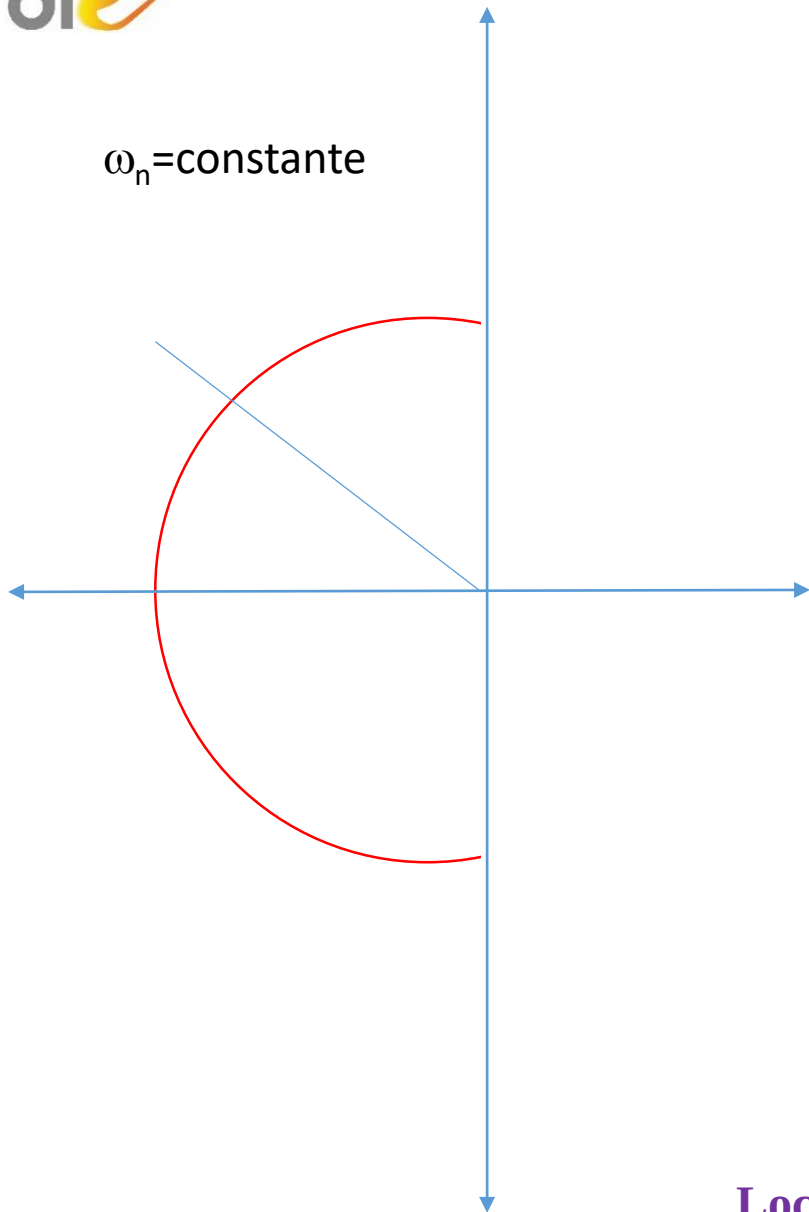
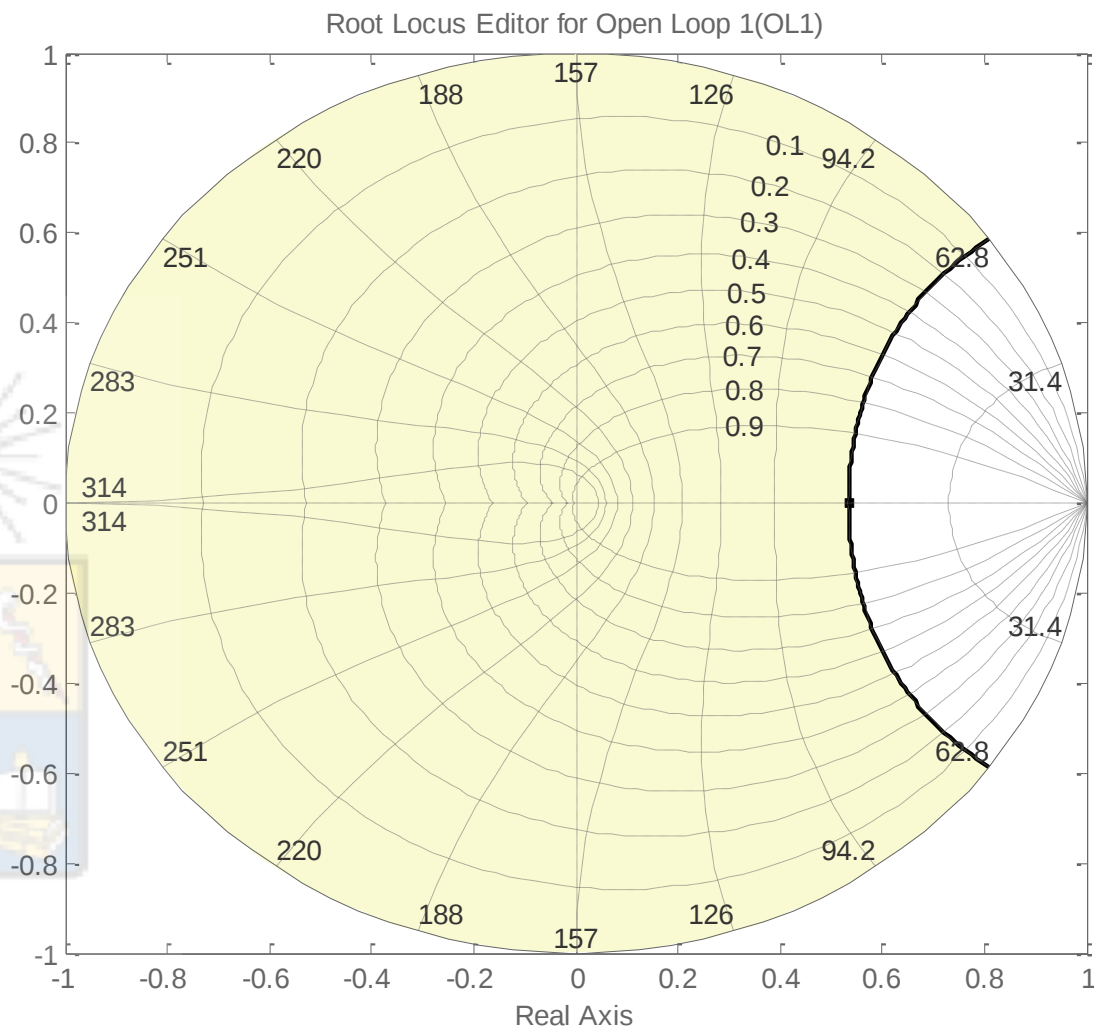
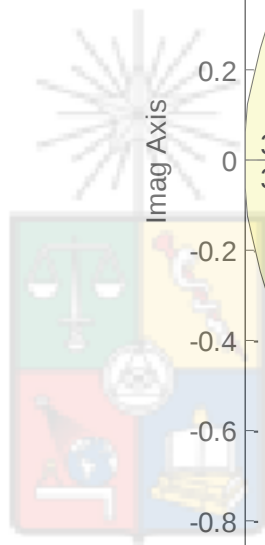




Locus del Coeficiente de Amortiguamiento Constante

- El locus del coeficiente de amortiguamiento es siempre el mismo. No varía con la frecuencia de muestreo.



$\omega_n = \text{constante}$  e^{sT} 

Locus de Frecuencia Natural Constante

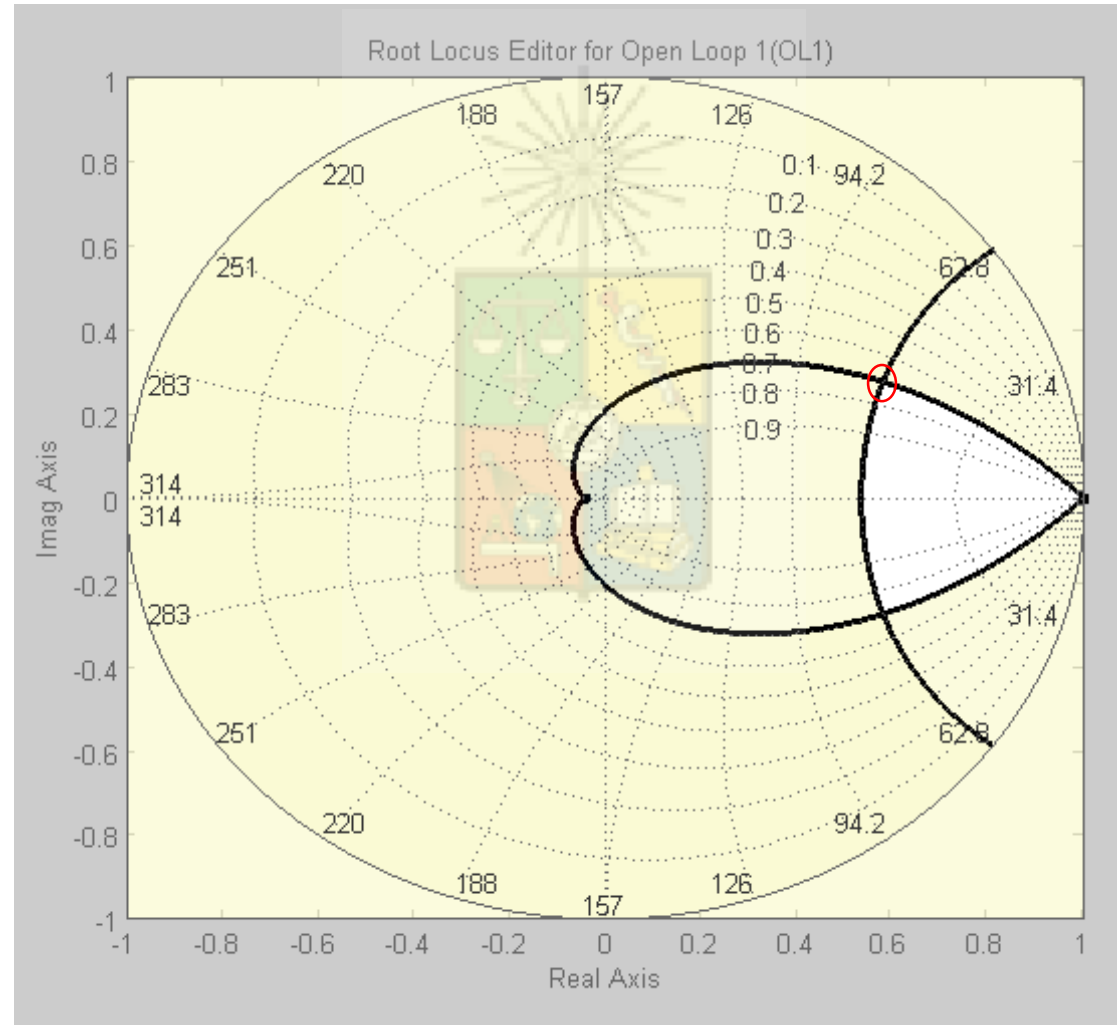
Locus de Frecuencia Natural Constante

- El locus de la frecuencia natural constante depende de la frecuencia de muestreo. Es decir, si la frecuencia de muestreo cambia, un punto dado en Z , cambia su frecuencia natural.



Punto de Diseño en Z

- El punto de diseño, para lograr la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento requerido, es el que se muestra en la figura.

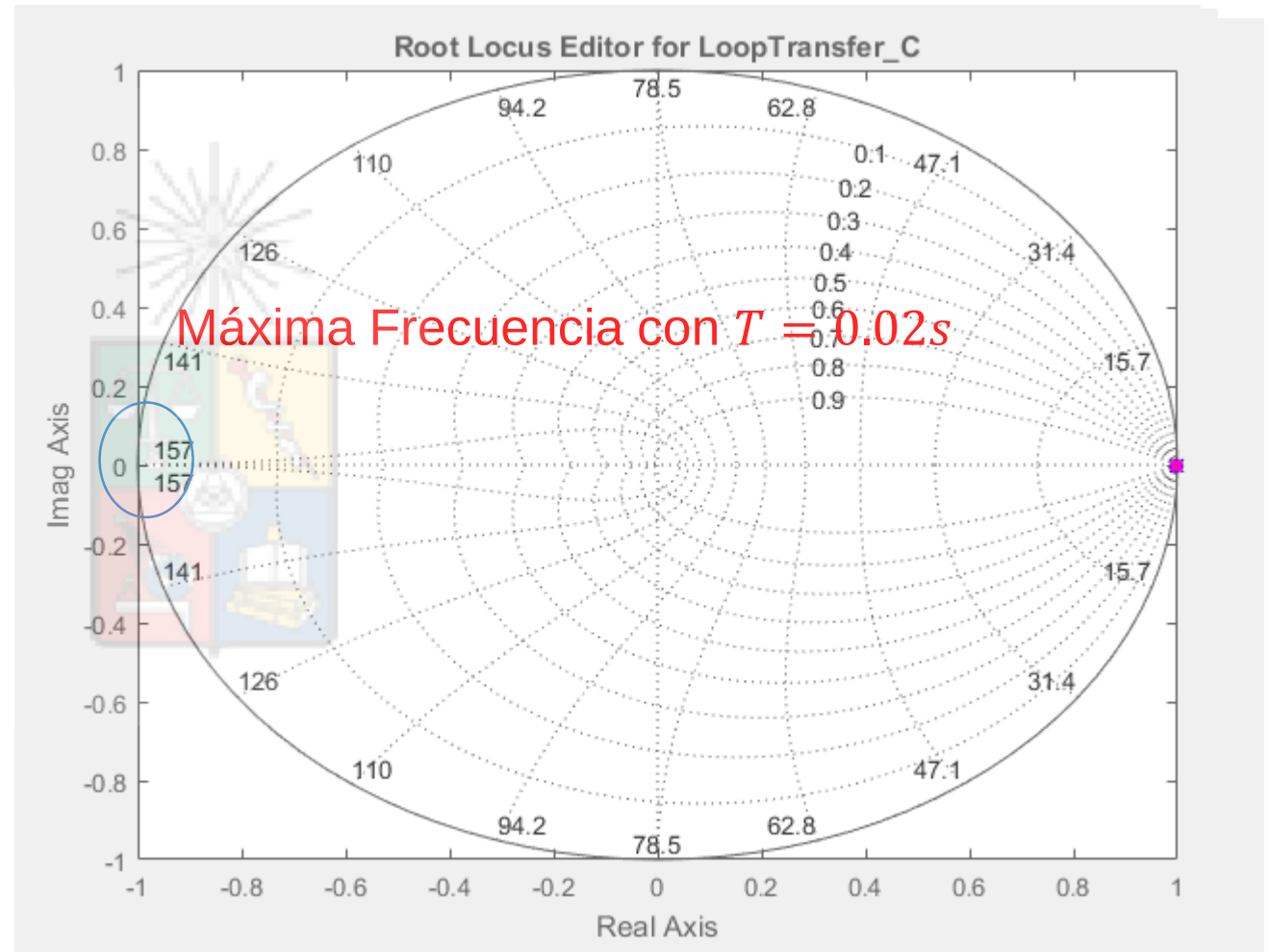


Plano Z - Polos y Ceros Discretos

- Frecuencia Sistema:

La máxima frecuencia a representar está dada por la el teorema de muestreo de Nyquist-Shannon.

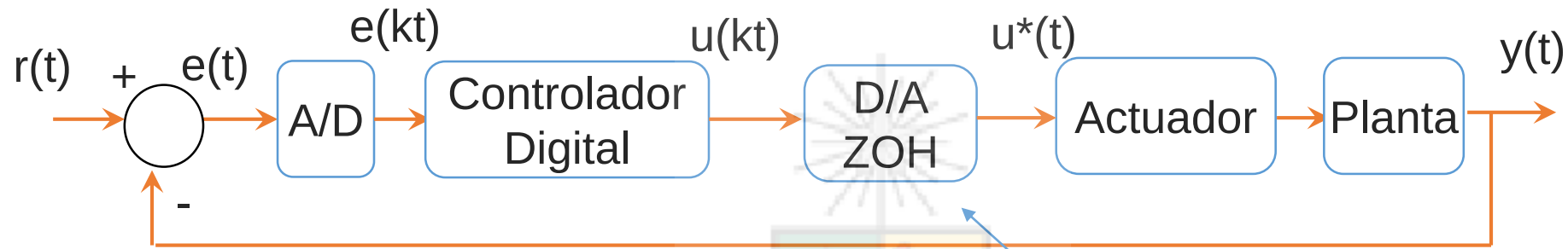
Es la mitad de la frecuencia de muestreo



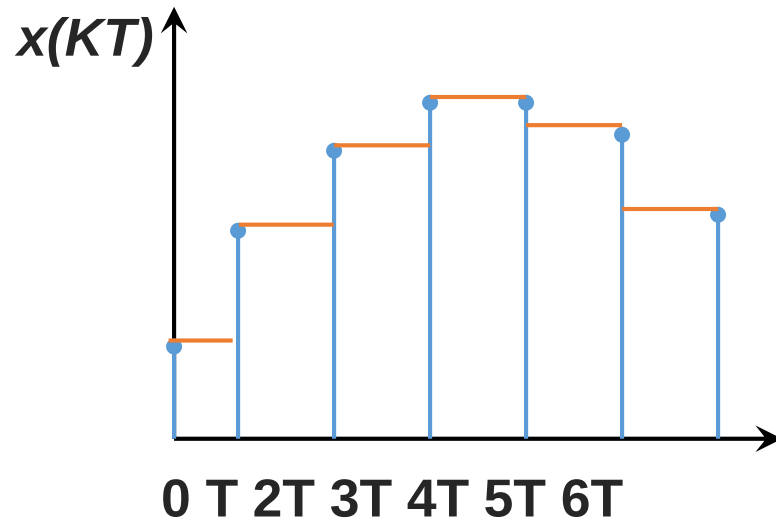
Discretización



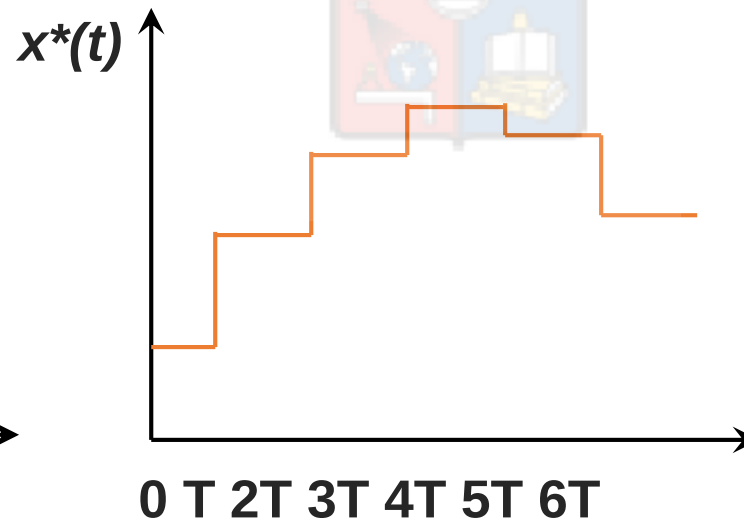
UNIVERSIDAD DE CHILE



Entrada ZOH



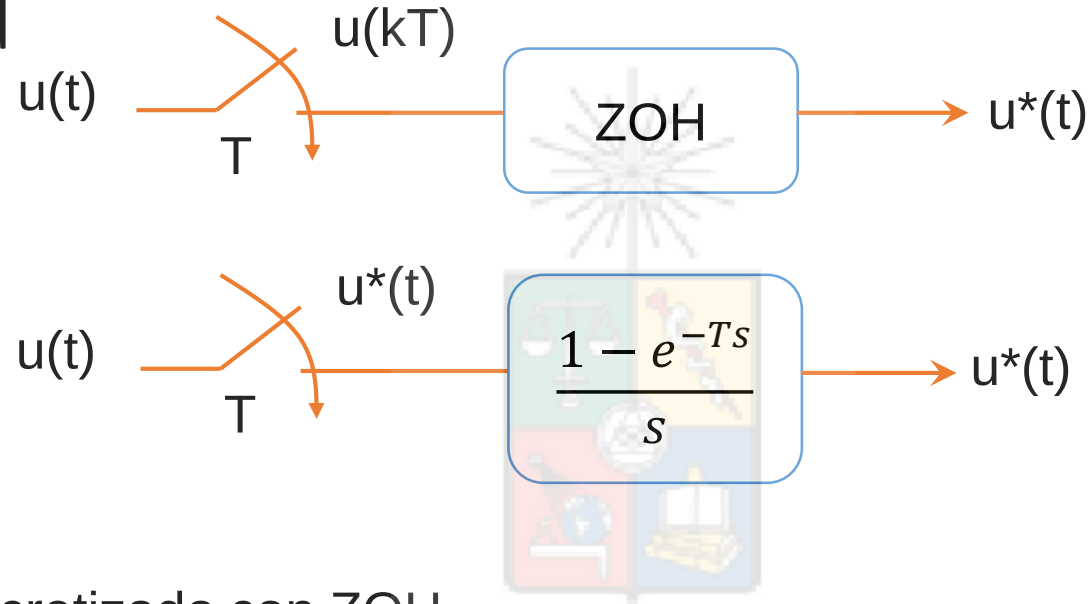
Salida ZOH



Al diseñar Controladores Digitales se debe considerar la influencia que representa la adición de esta función de transferencia (ZOH) en el lazo realimentado.

Discretización

- Zero-order hold



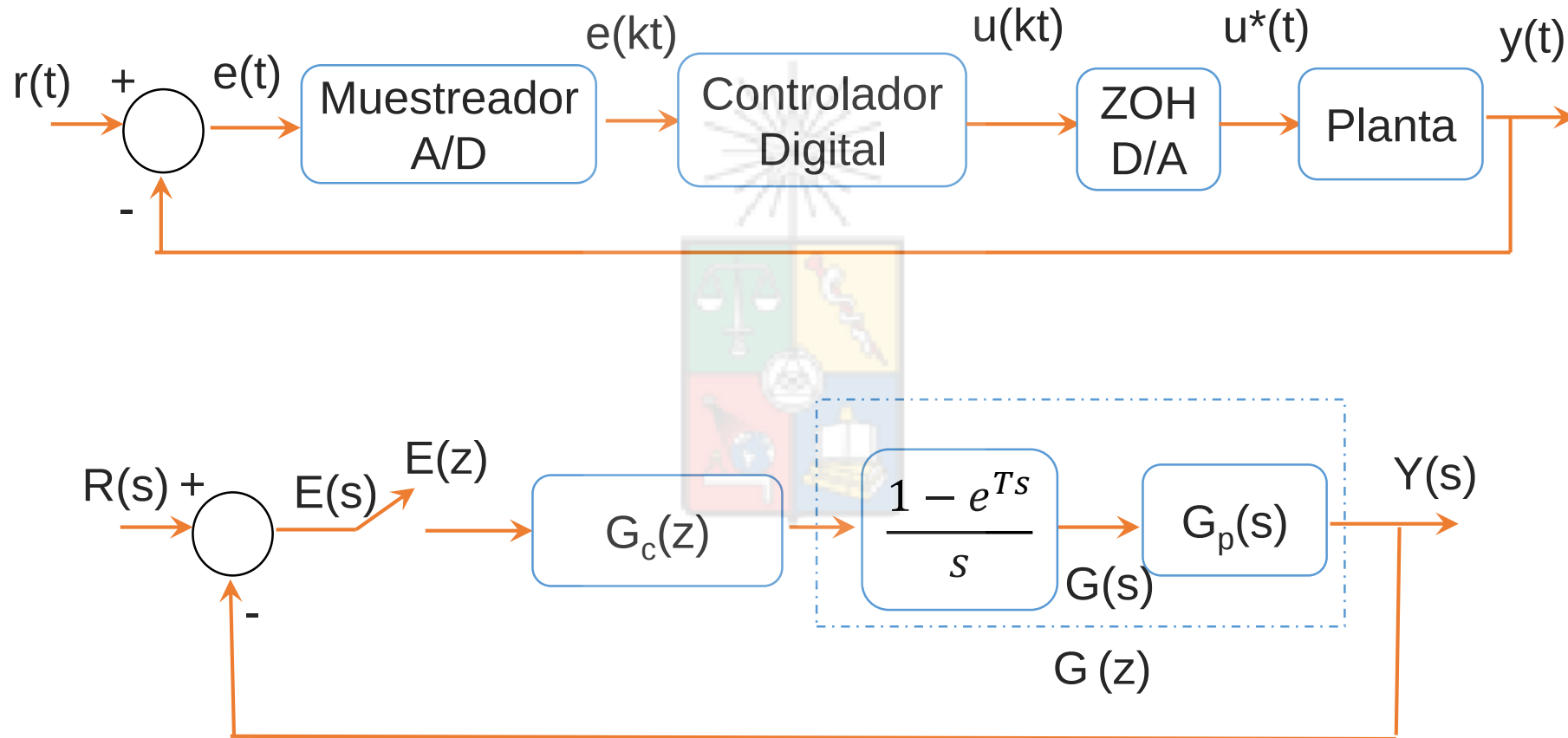
Planta discretizado con ZOH

$$G(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot G_p(s) \right\} = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left\{ \frac{G_p(s)}{s} \right\}$$

Discretización



UNIVERSIDAD DE CHILE

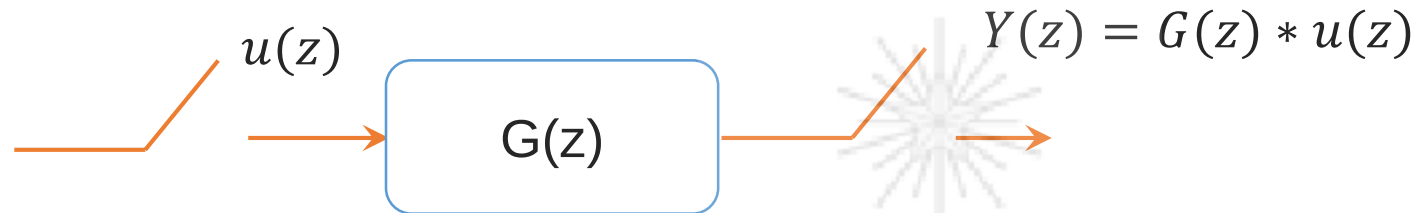


Discretización - Repaso Transformada Z

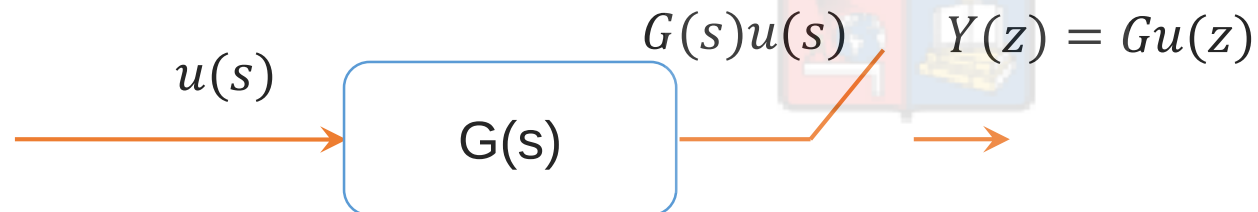


UNIVERSIDAD DE CHILE

Recuerde:



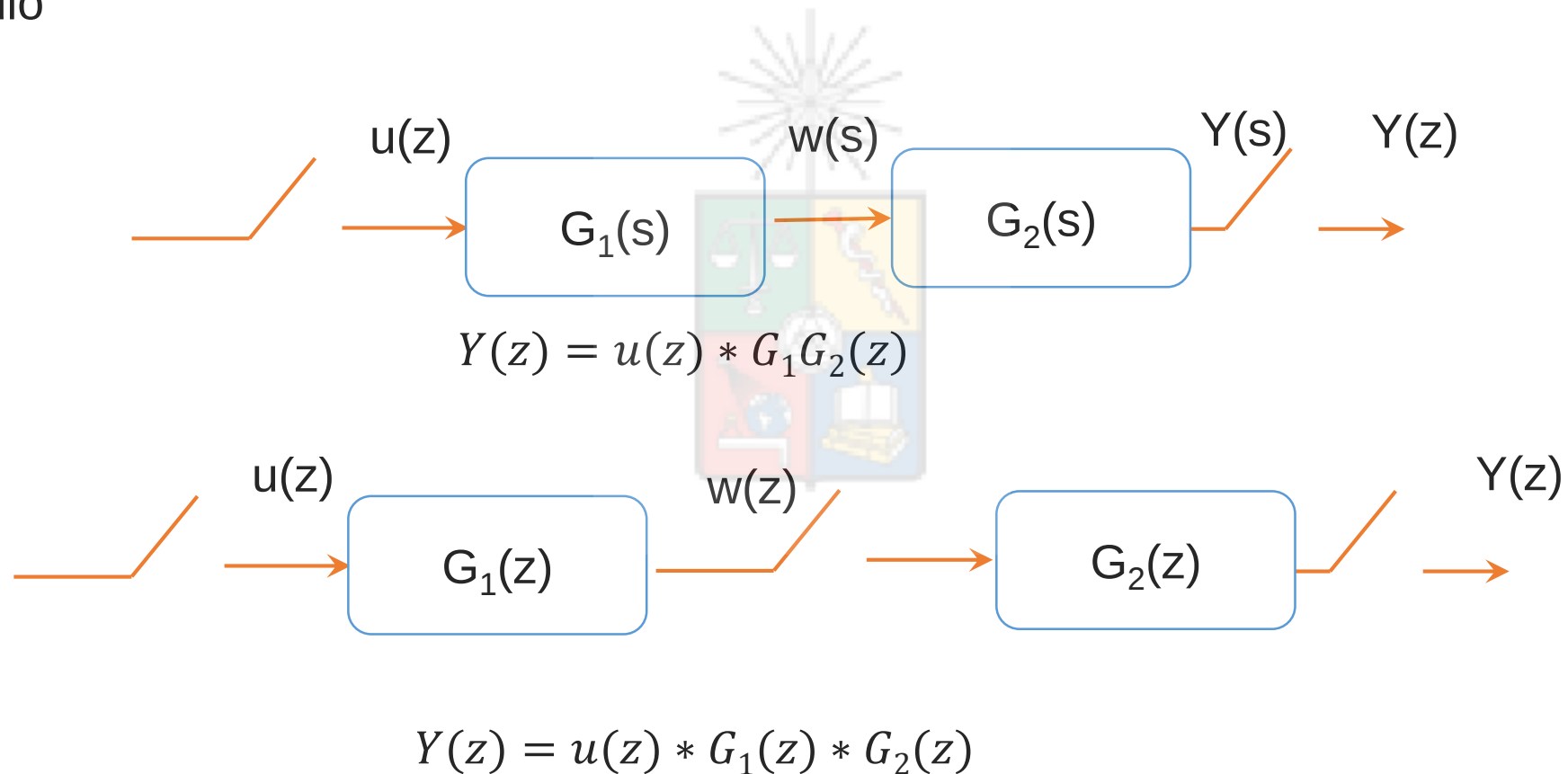
Es distinto de:



El término $Gu(z)$ indica que primero se multiplican las funciones en Laplace y luego se obtiene la transformada Z.

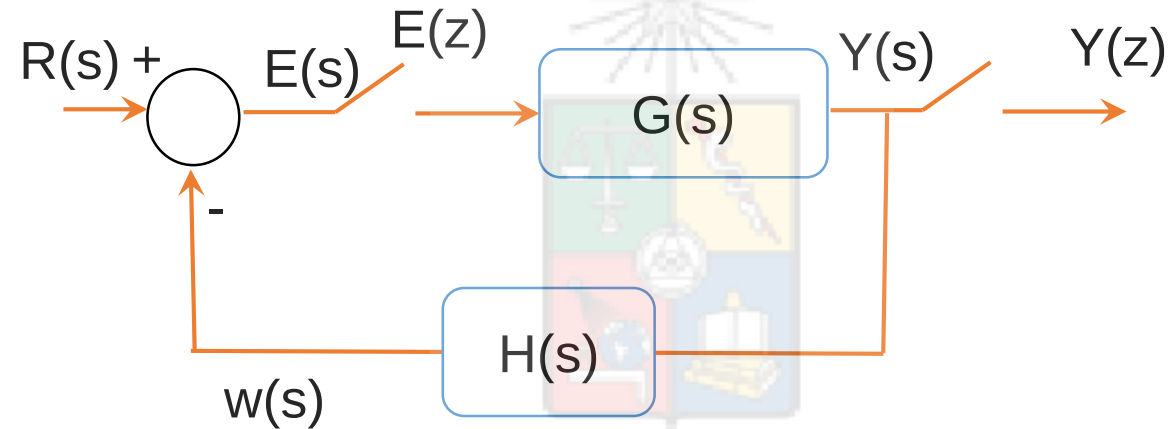
Discretización - Repaso Transformada Z

Lo mismo sucede con las funciones de transferencia donde no existe un muestreador en el medio



Ejercicio – Propuesto

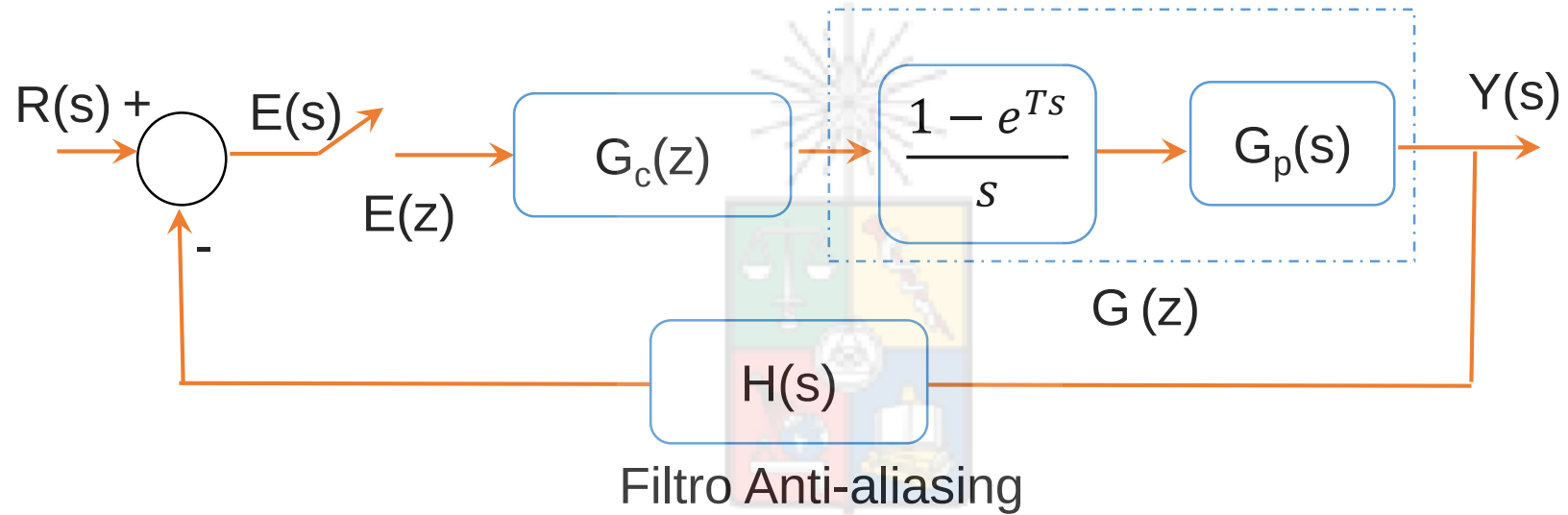
- Encontrar la Función discreta de lazo cerrado de:



Diseño PID Discreto

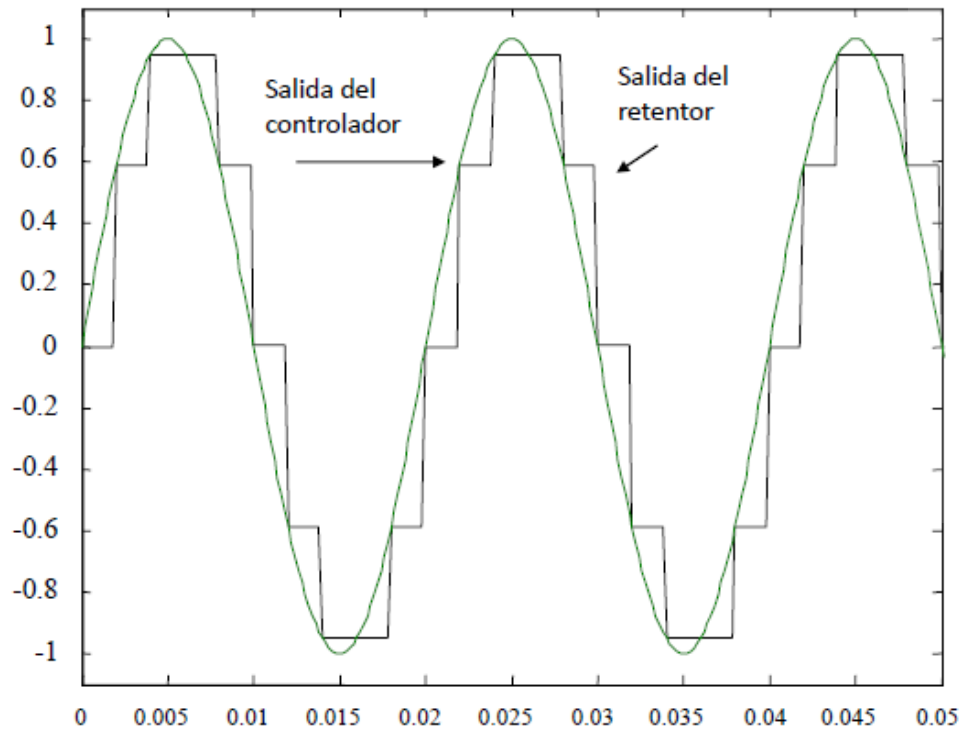


UNIVERSIDAD DE CHILE



Diseño controladores discretos. Ejemplo PID

Efectos de la
Implementación Digital



Opciones:

1. Diseñar PID continuo y discretizar
2. Discretizar Planta y diseñar PID discreto

$$z = e^{sT} = \frac{e^{\frac{sT}{2}}}{e^{-\frac{sT}{2}}} \approx \frac{1 + \frac{ST}{2}}{1 - \frac{sT}{2}} \rightarrow s \approx \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}$$

Diseño PID Discreto – Método 1

Discretización PID

(por simplicidad se asume PID ideal aunque sabemos que físicamente no existe ese controlador)

Continuo:

$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) E(s)$$

Discretización:

Se discretiza utilizando la transformación Bilineal (Tustin):

$$s \approx \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \quad z \approx \frac{1+s\frac{T}{2}}{1-s\frac{T}{2}}$$

PID Discreto:

$$U(z) = \left[K_{Pd} + \frac{K_{Id}}{1 - z^{-1}} + K_{Dd}(1 - z^{-1}) \right] E(s)$$

Con T tiempo de muestreo

$$K_{Pd} = K_P - \frac{K_P T}{2T_i}, K_{Id} = \frac{K_P T}{T_i}, K_{Dd} = \frac{K_P T_d}{T}$$



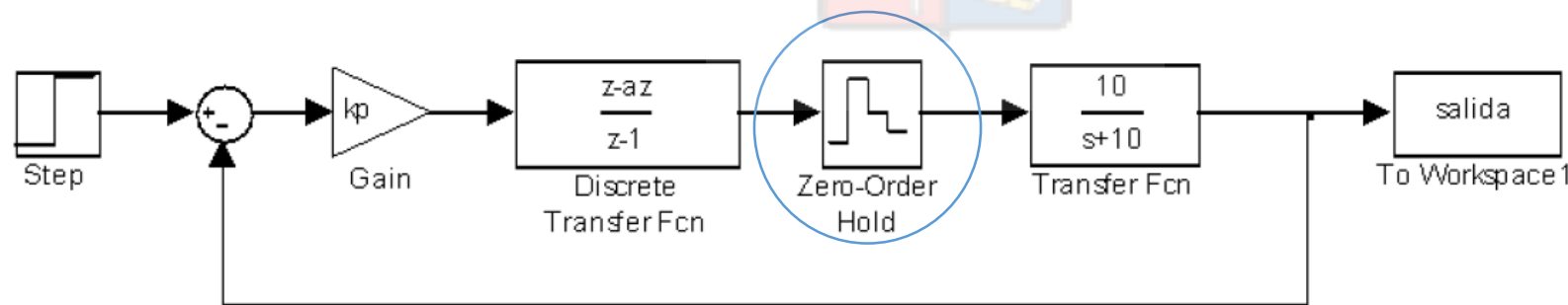
UNIVERSIDAD DE CHILE

die

Diseño PID Discreto – Método 1

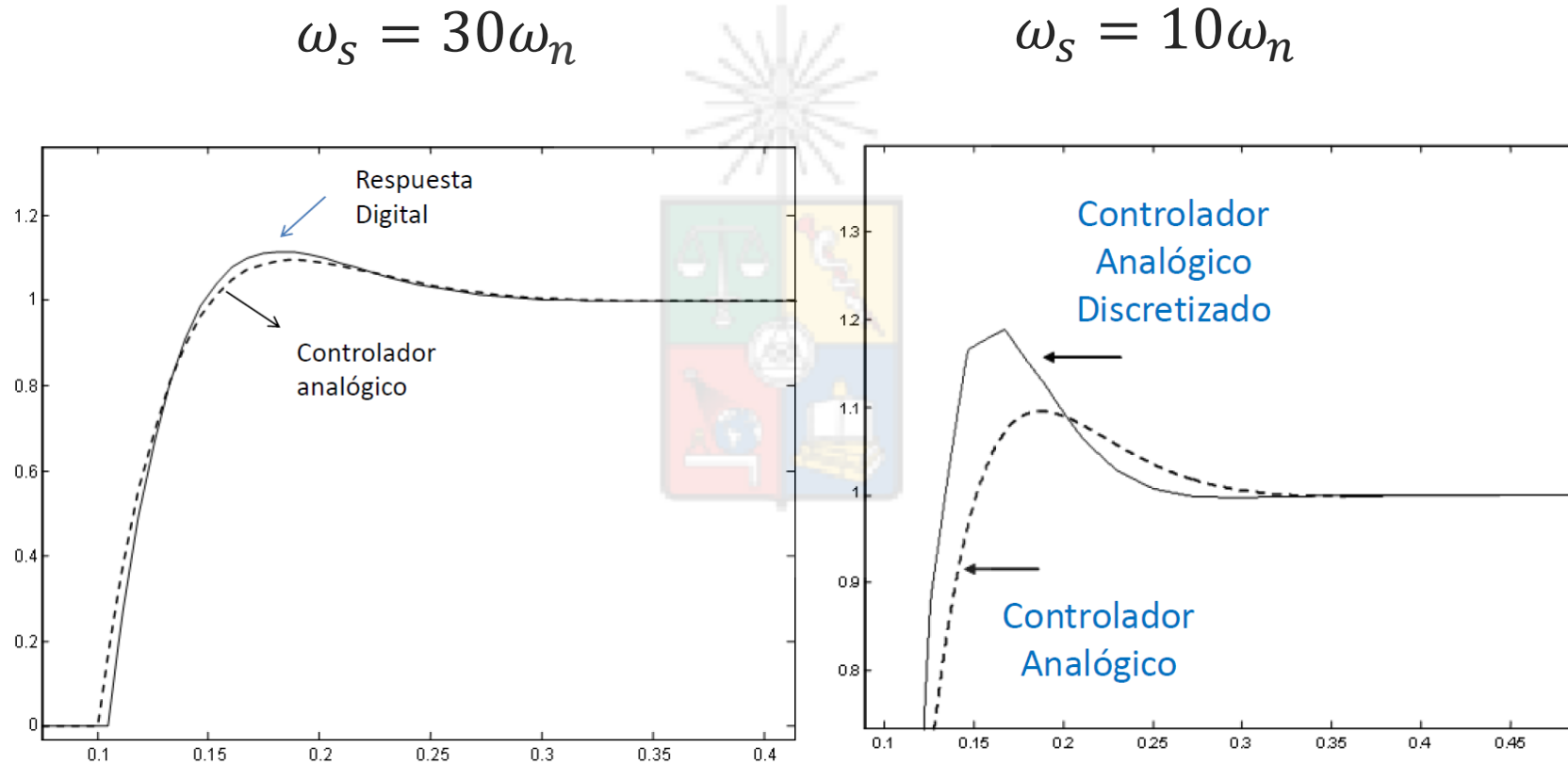
Discretización PI

- Bilinear no es exacta $\Rightarrow$ Para conservar la dinámica del sistema $\omega_s \geq 15 - 30\omega_n$ (este valor a veces varía)
- Ejemplo:
 - PI continuo para: $\xi = 0.8$ y $\omega_n = \frac{30\text{rad}}{s} \Rightarrow G_c(s) = 3.73 \frac{s+23.4}{s}$
 - PI digital con $\omega_s = 30\omega_n \Rightarrow G_c(z) = 4.034 \frac{z-0.849}{z-1}$



Diseño PID Discreto – Método 1

Discretización PID



Diseño PID Discreto – Método 1

Discretización PID

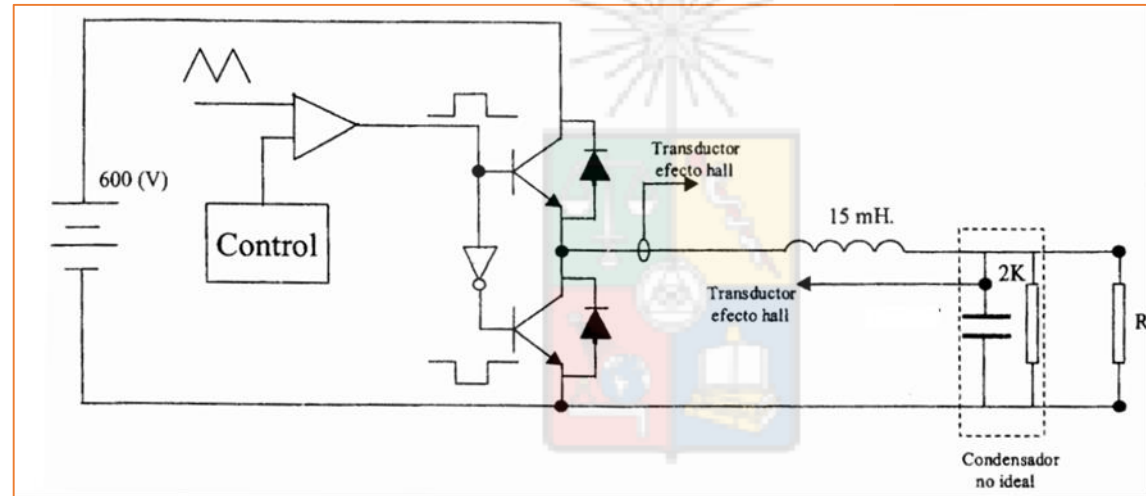
- El tiempo de muestreo esta limitado por el hardware.
- Ejemplo Controlador análogo diseñado para $\omega_n = 7.07 rad/s$ y $\xi = 0.707$.
- Ejemplo del diseño de un controlador de una máquina de corriente continua implementado utilizando Zilog Z80.

$\frac{\omega_s}{\omega_n}$	Frecuencia natural equivalente al utilizar el diseño discretizado	Coefficiente de amortiguamiento en z
1.5	2.34	<i>Inestable</i>
3	4.71	0.11
5	5.9	0.3
10	6.75	0.511
15	6.95	0.58
20	7.2	0.6
<i>continuo</i>	7.07	0.707

- En general la pérdida de amortiguamiento y frecuencia natural de un controlador discretizado, dependen del sistema de control y del diseño del controlador que se está discretizando (PI, PID, lead-lag, etc.).
- Sin embargo una regla ampliamente aceptada es asumir que no existe mayor pérdida de desempeño cuando el controlador se discretiza y se utiliza en un sistema de control digital con una relación $\omega_s / \omega_n > 30$.
- Esto es al menos 7 veces superior al límite establecido por la velocidad de Nyquist. (recuerde que en la presencia de ceros de lazo cerrado y/o polos de lazo cerrado mal amortiguado, el ancho de banda de un sistema puede ser hasta dos veces la frecuencia natural).

Excepciones

- La regla de utilizar $30 \times$ frecuencia natural para calcular la frecuencia de muestreo cuando se utiliza Tustin, funciona casi siempre.
- Una posible excepción podría ser el caso de filtros LC utilizados en alguna aplicaciones como por ejemplo microrredes.



- ¿Por qué?

Excepciones

- En general el filtro LC se diseña para una frecuencia resonante alta, como regla básica se intenta que la frecuencia resonante sea 10 veces mas alta que la frecuencia de operación.
- Esto para evitar que la frecuencia de operación cause resonancias.
- Por ejemplo para 50Hz (314rad/seg) se diseñaría para 3140rad/seg (500Hz).
- El utilizar bilineal para discretizar el filtro podría causar una mala representación. Esto haría que algunos métodos de control, como utilizar cancelación no funcionen bien.
- O sea el sistema discreto podría “pensar” que los polos están en una posición cuando se encuentran en otra.

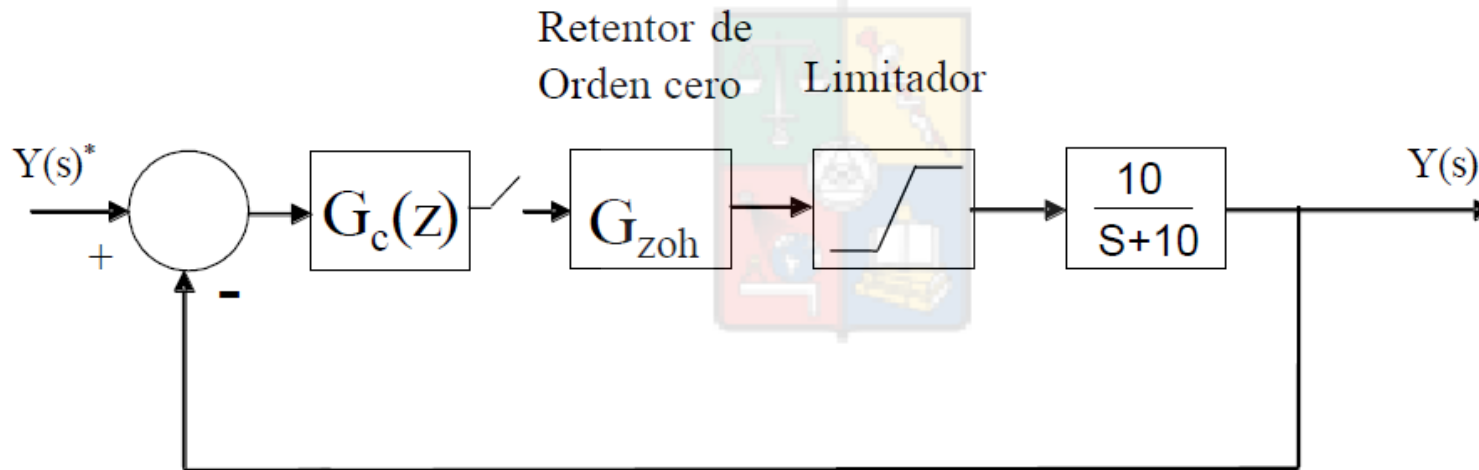
Diseño Utilizando Bilineal

- La transformada bilineal puede ser utilizada en otras aplicaciones digitales. Por ejemplo para implementar filtros en el plano z .
- Esto se debe a que existe mucha información acerca del diseño de filtros en el plano s . Por ejemplo para familias de filtros como Butterworth, Chevyshev, Cauer, etc.

Diseño PID Discreto – Método 2

Discretización Planta

- Planta de Primer Orden:
- Criterio: $\omega_n = 40 \frac{rad}{s}$, $\xi = 0.8$, $\omega_s = 10 \omega_n$



Diseño PID Discreto – Método 2

Discretización Planta

Discretización Planta:

$$G_p(z) = \left(\frac{z-1}{z} \right) Z \left\{ \frac{10}{s(s+10)} \right\} = \frac{1 - e^{-10T}}{z - e^{-10T}}$$

- $T = 0.015$
- En Matlab:
 - `Sys = tf([num],[den])`
 - Entrega función de transferencia: `Sysd = c2d(sysc, Ts, 'zoh')`
 - T_s es el tiempo de muestreo.

Diseño PID Discreto – Método 2

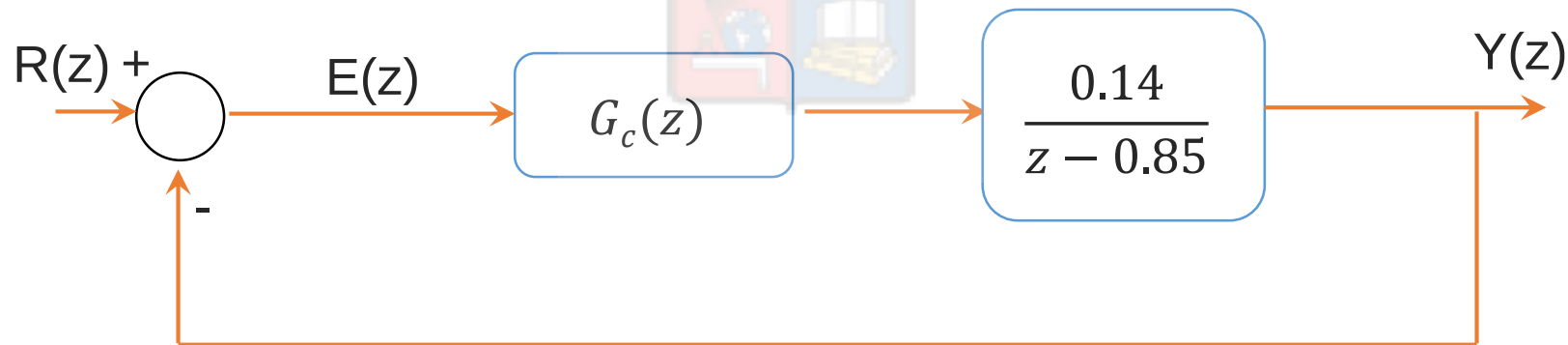
Discretización Planta

1. Discretización Planta:

Se resuelve utilizando fracciones parciales

$$G_p(z) = \left(\frac{z-1}{z} \right) Z \left\{ \frac{10}{s(s+10)} \right\} = \frac{1 - e^{-10T}}{z - e^{-10T}}$$

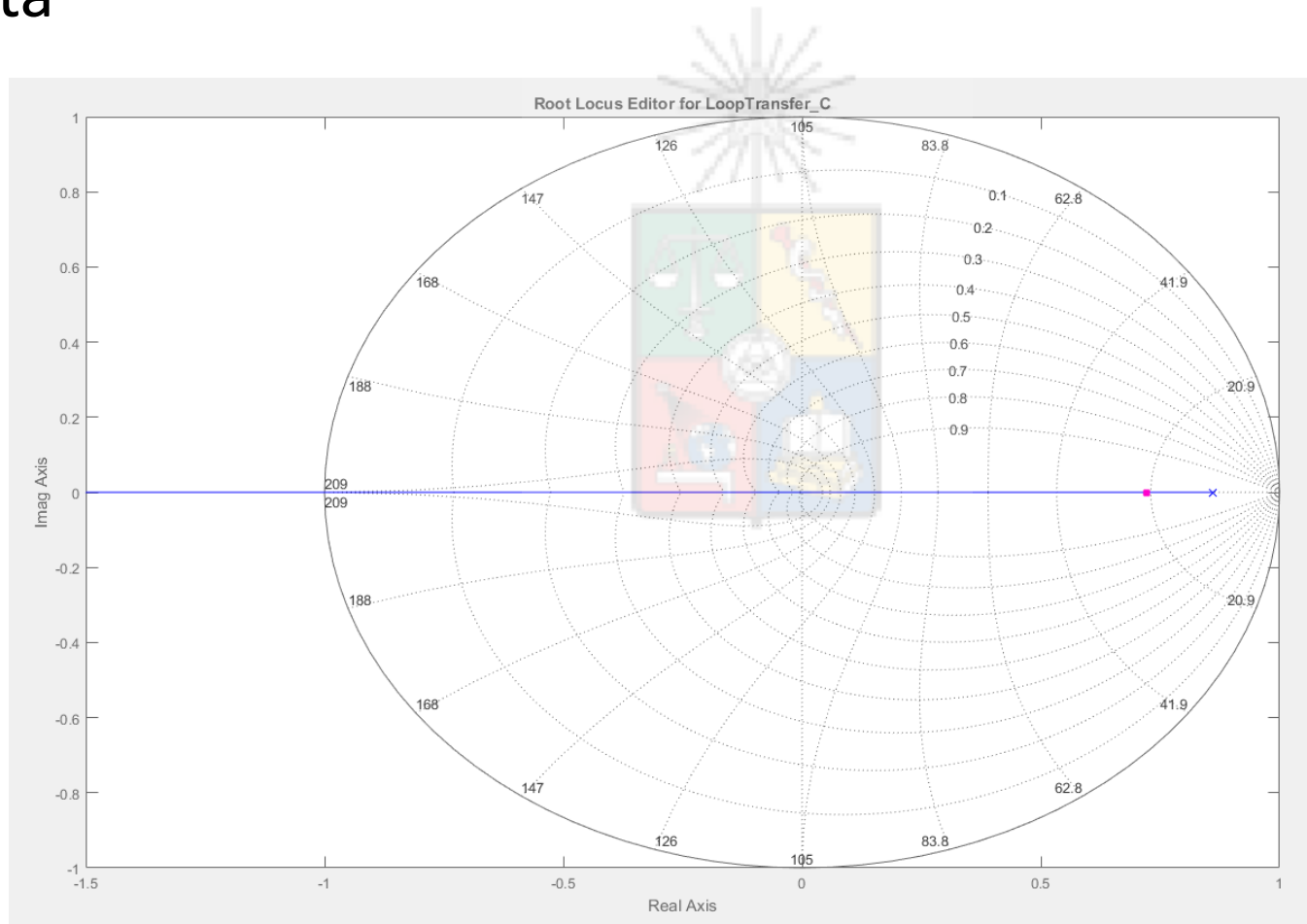
- $T = 0.015$



Diseño PID Discreto – Método 2

Discretización Planta

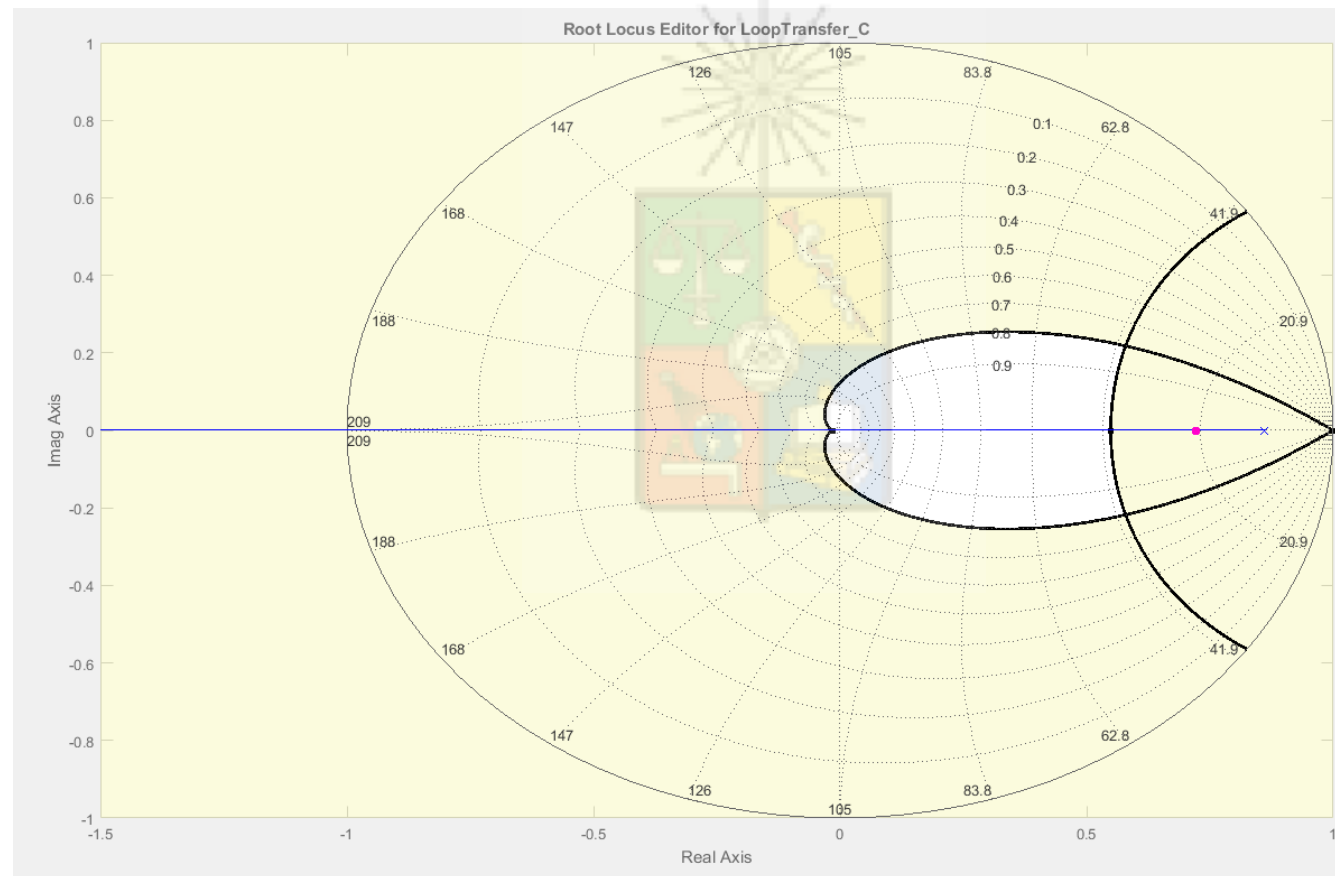
- LGR Planta



Diseño PID Discreto – Método 2

Discretización Planta

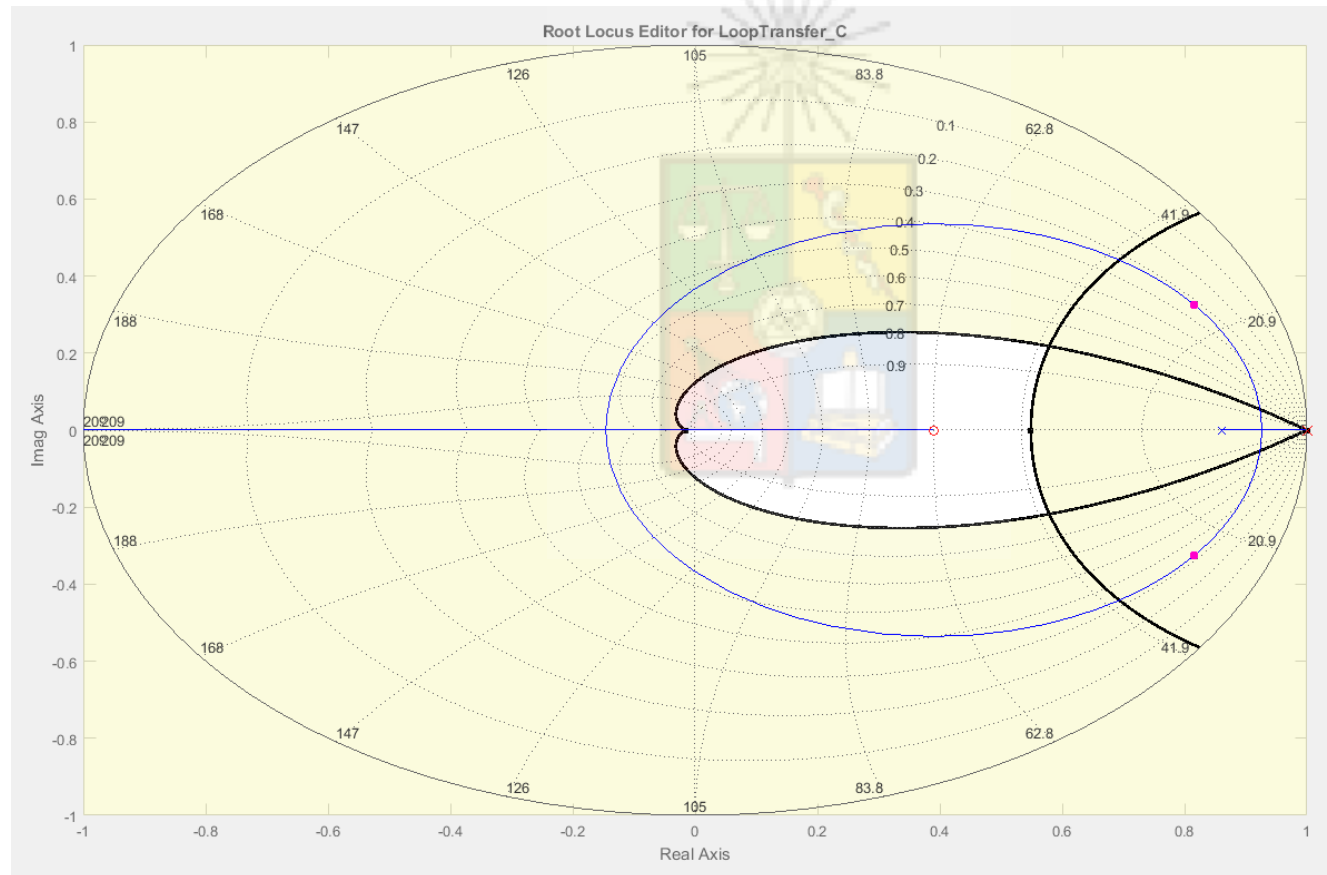
- LGR Planta + Criterios de Diseño



Diseño PID Discreto – Método 2

Discretización Planta

- LGR Planta + Criterios de Diseño + Cero y Polo Controlador



Diseño PID Discreto – Método 2

Discretización Planta

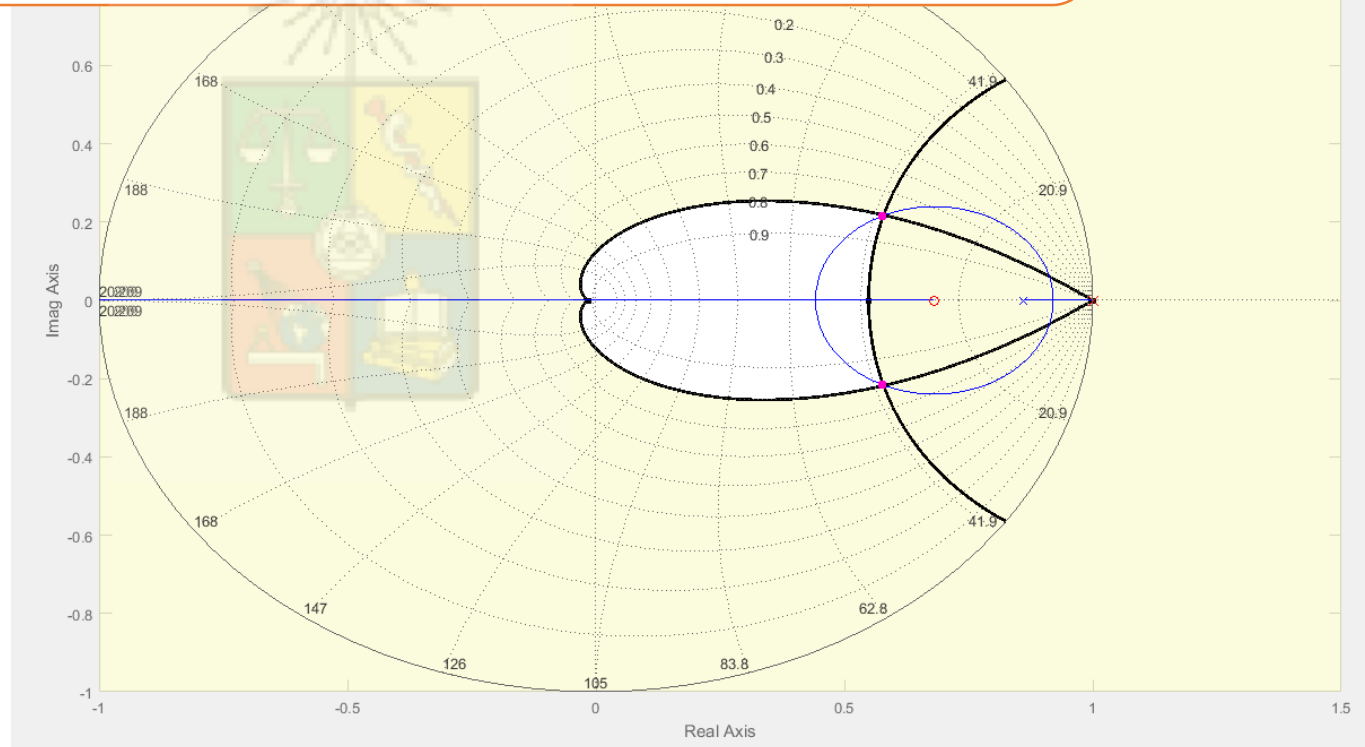


UNIVERSIDAD DE CHILE

- PI Sintonizado

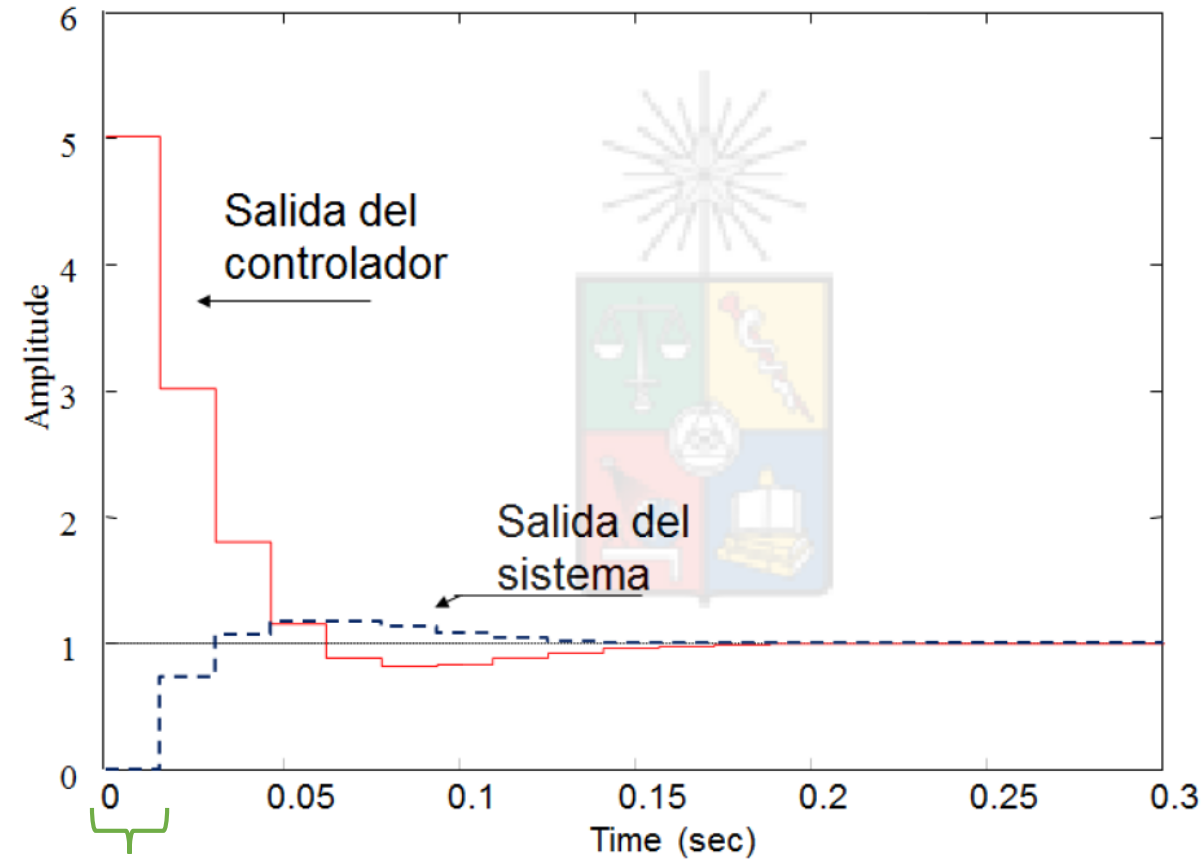
Las reglas del lugar de la raíz son idénticas en el plano z que las existentes en el plano s . El punto de diseño no está ubicado en el mismo lugar.

$$G_c(z) = \frac{5.0727(z - 0.6807)}{z - 1}$$



Diseño PID Discreto – Método 2

Discretización Planta

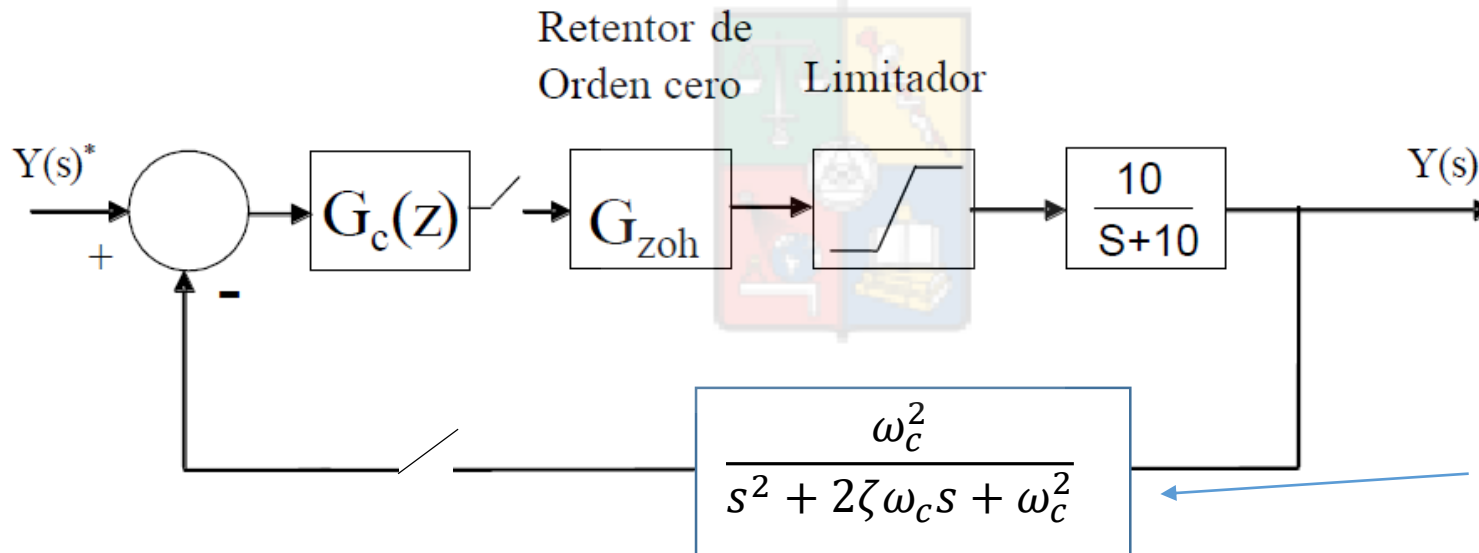


$$T_s = 0.015s$$

Diseño compensador Discreto – Método 2

Considerando filtro antialiasing

- Planta de Primer Orden:
- Criterio: $\omega_n = 40 \frac{rad}{s}$, $\zeta = 0.8$, $\omega_s = 10 \omega_n$



Filtro de segundo orden.
Utilizado como antialiasing

(solo como ejemplo, usualmente los
filtros antialiasing son de mayor
orden)

Por ejemplo utilizar una frecuencia de corte ω_c igual a 200rad/seg

PI Discreto con Anti Windup



UNIVERSIDAD DE CHILE

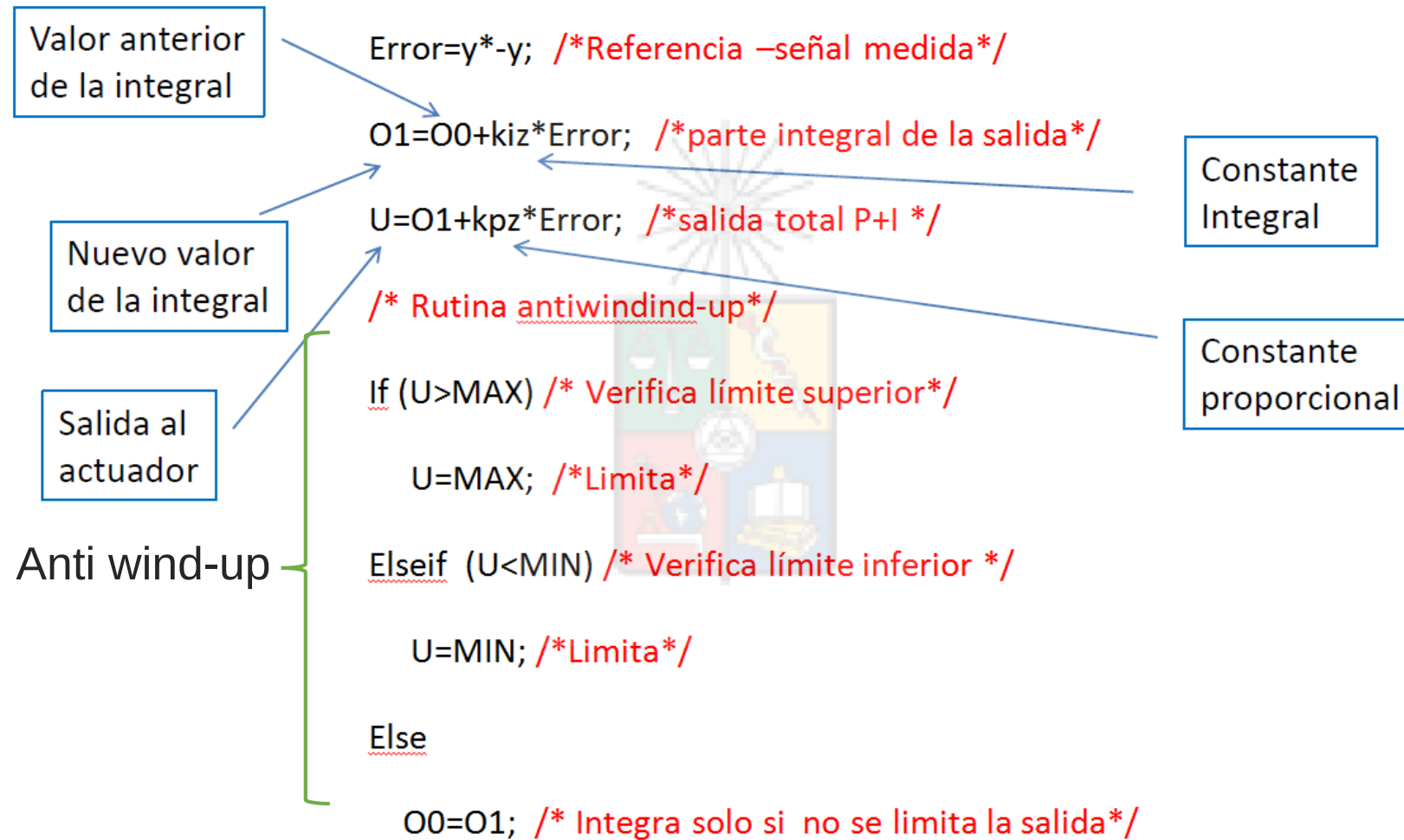
- Controlador:

$$\frac{K_z(z - a_z)}{z - 1}$$

- Se puede separar la parte proporcional de la integral:

$$K_{pz} + K_{iz} \frac{z}{z - 1}$$

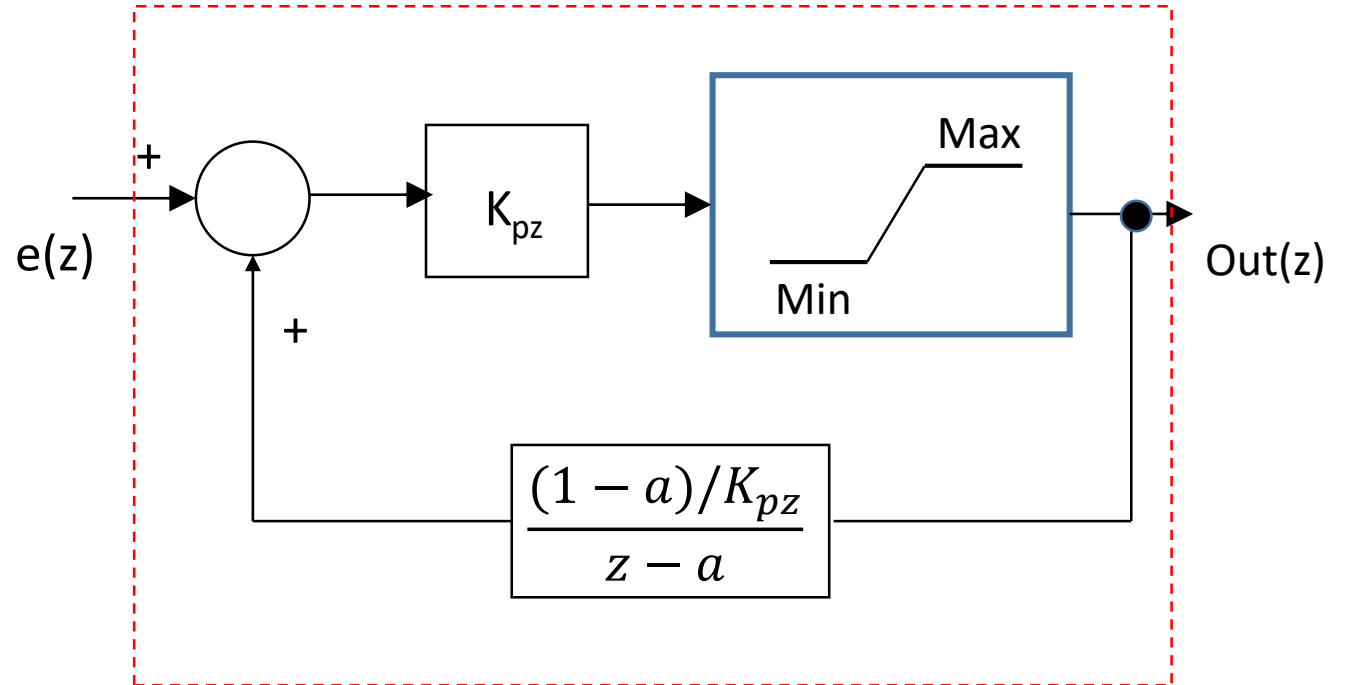
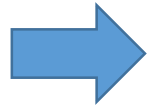
PI Discreto con Anti Windup



Este código se implementa en C++ u otro lenguaje de programación.

Ejemplo de PI Discreto con Anti-Windup Generalizado

$$PI(z) = K_{pz} \frac{z - a}{z - 1}$$

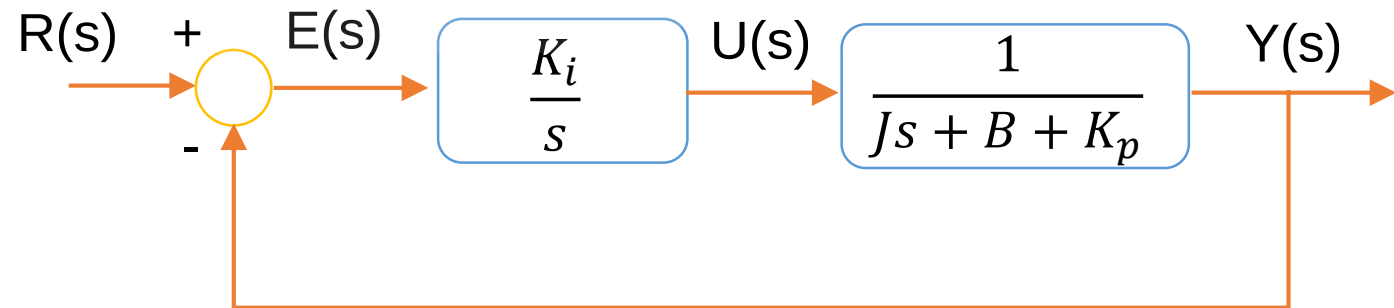
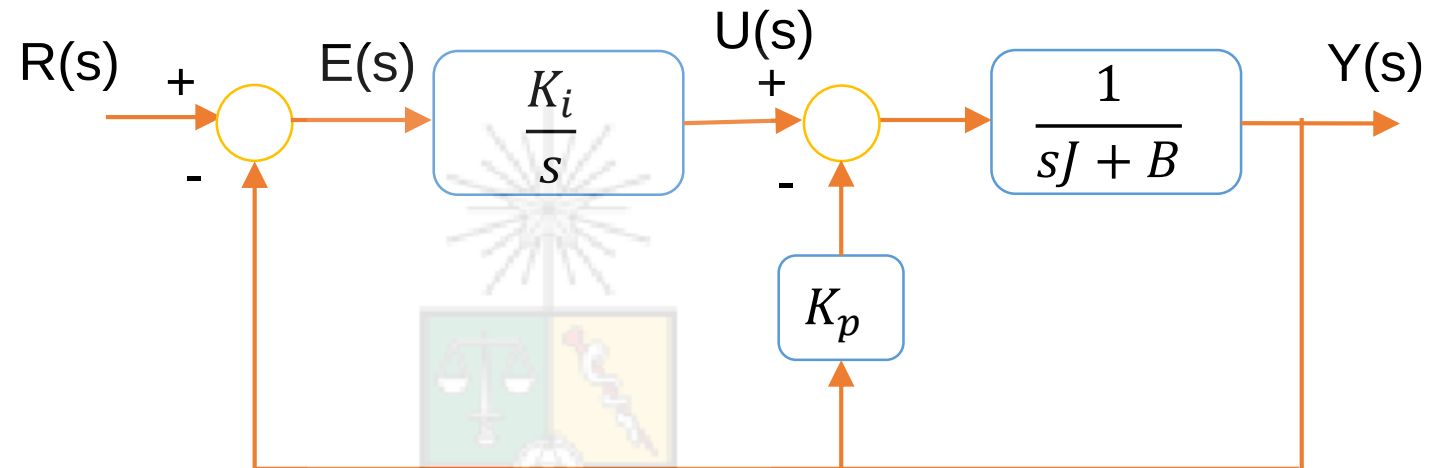


Antiwinding Up

- Para otro tipo de controladores se puede utilizar alguno de los muchos esquemas antiwinding up disponibles en la literatura.
- Por ejemplo el esquema de antiwinding up que se enseña en la Universidad de Newcastle Australia y que habitualmente utilizan los alumnos de la UTFSM.
- Aunque éste funciona bien (en sistemas bipropios), recuerden que existen alternativas disponibles. Incluso existen papers que discuten las ventajas y desventajas de los distintos tipos de métodos antiwinding up reportados en la literatura del área.

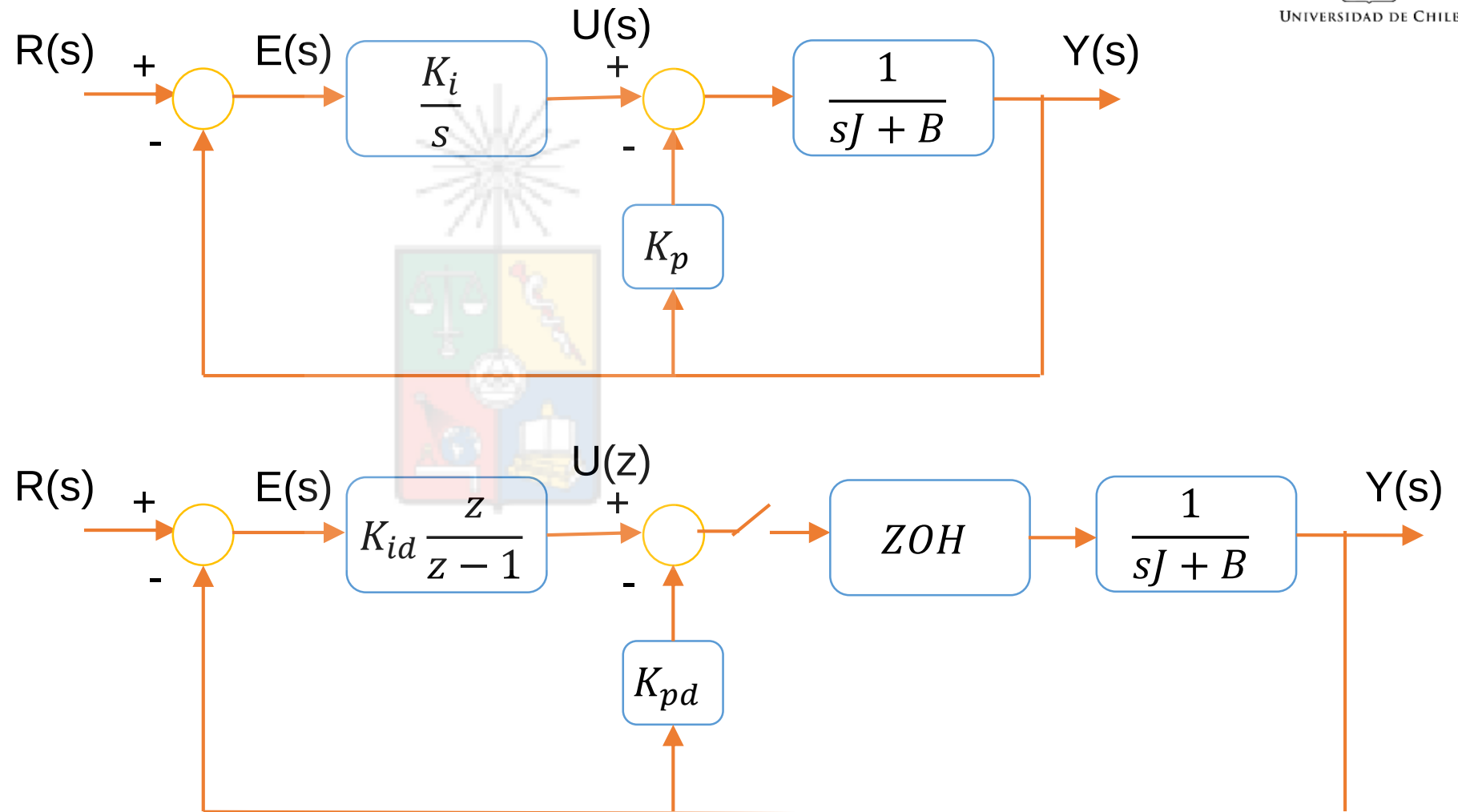
IP Digital

- Caso Continuo



IP Digital

- Caso Digital



UNIVERSIDAD DE CHILE

IP Digital



UNIVERSIDAD DE CHILE

El controlador IP se puede diseñar en forma analógica y discretizar o se puede diseñar directamente en el plano z .

Como ya se ha discutido anteriormente, el desempeño de los controladores discretizados utilizando bilineal, es bueno cuando la razón entre la frecuencia de muestreo y la frecuencia natural es alta, en lo posible 25-30 veces.

Al diseñar el controlador IP, directamente en el plano z , generalmente se utilizan métodos algebraicos.

IP Digital – Método 1 Discretización PID



UNIVERSIDAD DE CHILE

$$\frac{K_i}{s} \Rightarrow K_i \frac{T(z+1)}{2(z-1)}$$

- Si la frecuencia de muestreo es suficientemente alta, se tiene:

$$e(z)(z+1) \approx 2ze(z)$$

Finalmente:

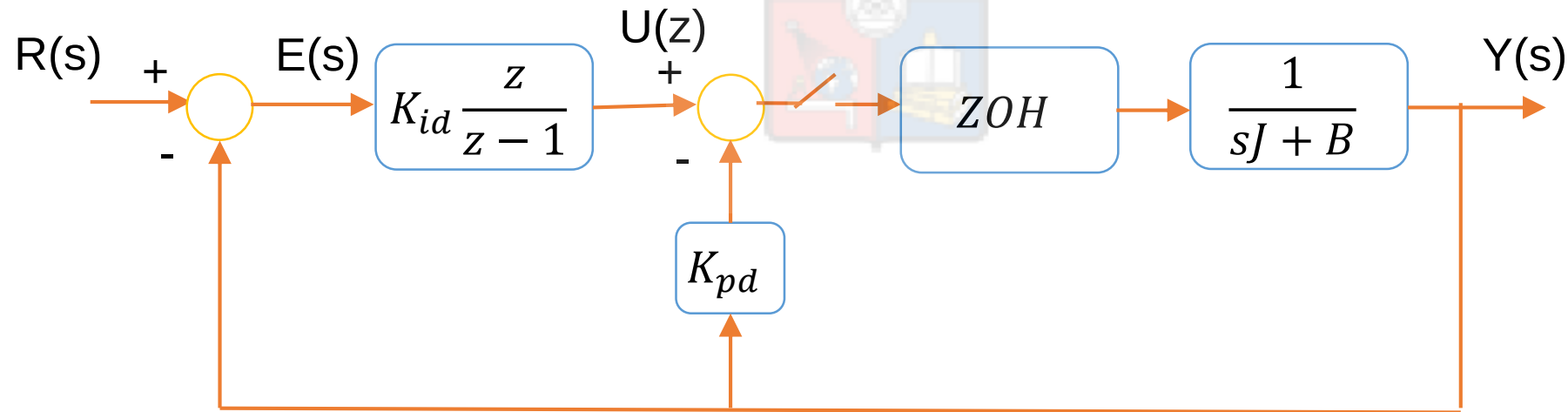
$$\frac{K_i}{s} \Rightarrow K_i \frac{T(z+1)}{2(z-1)} \Rightarrow K_i T \frac{z}{z-1}$$

$$K_{id} = K_i T \text{ y } K_{pd} = K_p$$

IP Digital Exacto – Método 2 Discretización Planta

- La ecuación característica en el plano z para un sistema de segundo orden con una frecuencia natural ω_n y coeficiente de amortiguamiento ζ es:

$$z^2 - 2e^{-\omega_n \zeta T} \cos\left(\omega_n T \sqrt{1 - \zeta^2}\right) z + e^{-2\omega_n \zeta T} = 0$$



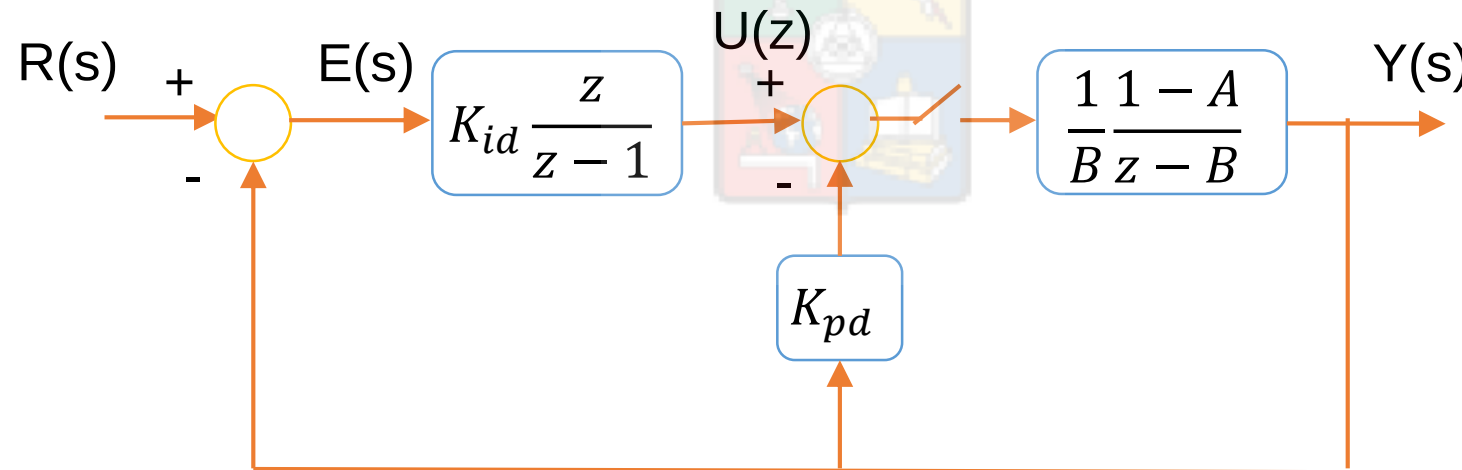
IP Digital Exacto – Método 2 Discretización Planta



UNIVERSIDAD DE CHILE

$$\frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{\frac{1}{J}}{s \left(s + \frac{B}{J} \right)} \right\} = \frac{1}{B} \frac{1 - e^{-T \frac{B}{J}}}{z - e^{-T \frac{B}{J}}} = \frac{1}{B} \frac{(1-A)}{z-A}$$

$$A = e^{-T \frac{B}{J}}$$



IP Digital Exacto – Método 2 Discretización Planta

- La ecuación característica del sistema anterior se iguala a:

$$z^2 - 2e^{-\omega_n \xi T} \cos\left(\omega_n T \sqrt{1 - \xi^2}\right) z + e^{-2\omega_n \xi T} = 0$$

- Y se obtienen las constantes proporcional e integral en forma algebraica



UNIVERSIDAD DE CHILE



Roberto Cárdenas Dobson, Msc. Ph.D
Profesor Titular, U. Chile

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

