UNIVERSIDAD DE CHILE

Kindergarten de Diseño de Diseño de Controladores

(utilizando una planta de primer orden)

Diseño Básico de Controladores

- No existen reglas para el diseño de controladores. Para una planta y especificaciones dadas pueden existir dos o mas controladores que entreguen buen desempeño.
- En las siguientes páginas se estudiarán varios enfoques para diseñar un controlador simple para una planta de primer orden.

Diseño Básico de Controladores

- Los enfoques de diseño no son únicos. El estudiante debe recordar que las únicas limitaciones que existen para diseñar un controlador son:
  - a) El controlador debe cumplir con las especificaciones a lazo cerrado.
  - b) El controlador debe ser simple. Las soluciones complicadas pueden ser difíciles de implementar. Recuerde, en ingeniería las soluciones simples son las que funcionan.

La planta de primer orden es muy común, especialmente en máquinas eléctricas. En las siguientes secciones se estudiarán controladores para cumplir con las siguientes especificaciones a lazo cerrado:

- *Cero error a estado estacionario para una entrada escalón.*

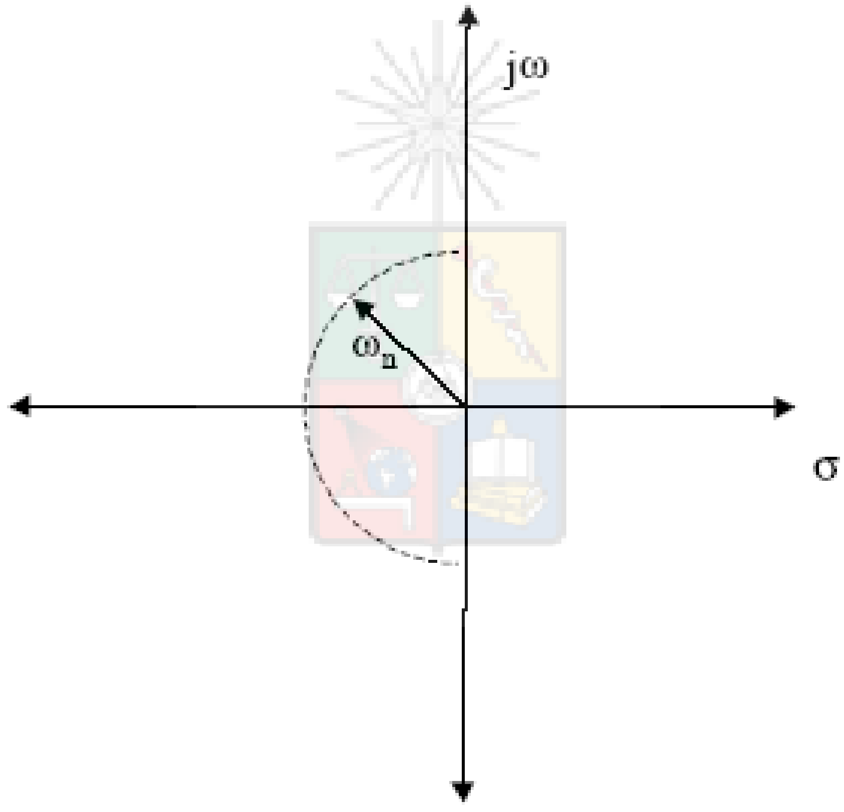
- *Frecuencia natural.*

- *Coeficiente de amortiguamiento.*

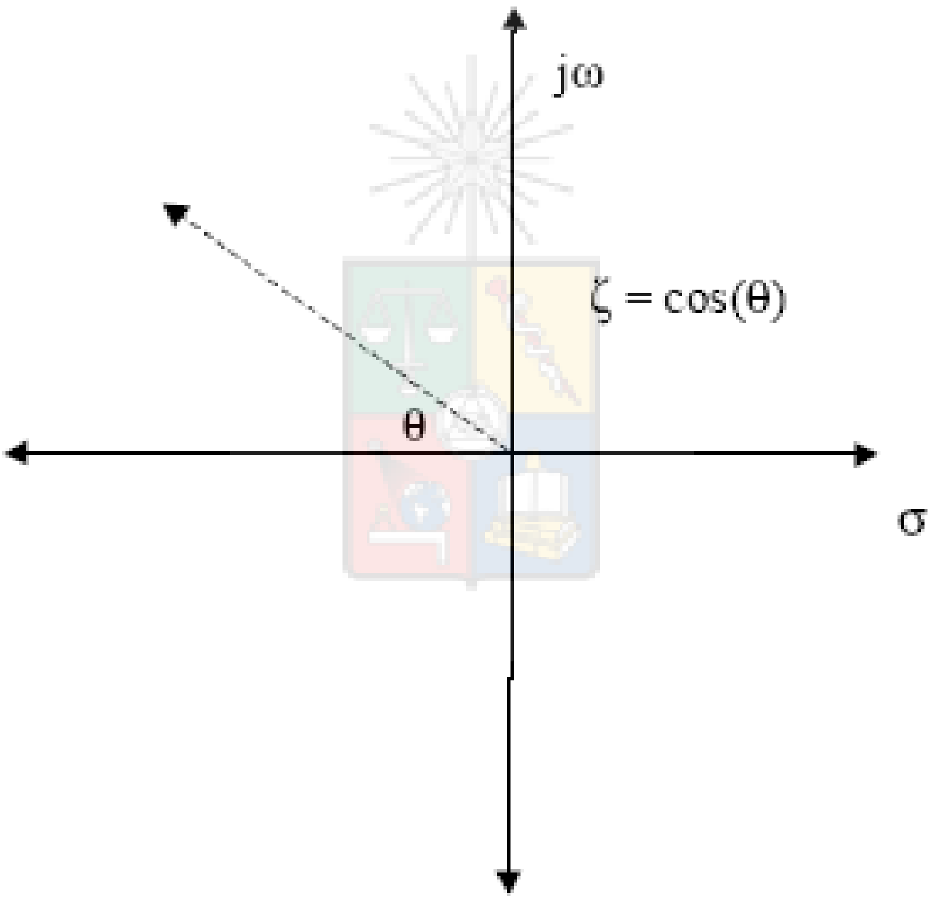
Antes de estudiar cualquier controlador se puede obtener la siguiente información, considerando las especificaciones del sistema:

1) El sistema a lazo abierto debe tener un polo en el origen. Sin este polo no es posible obtener cero error a estado estacionario con entrada escalón.

2) Todas las combinaciones posibles de polos a lazo cerrado, que entregan una frecuencia natural ω_n forman un semicírculo de radio ω_n. Esto se muestra en la siguiente figura:



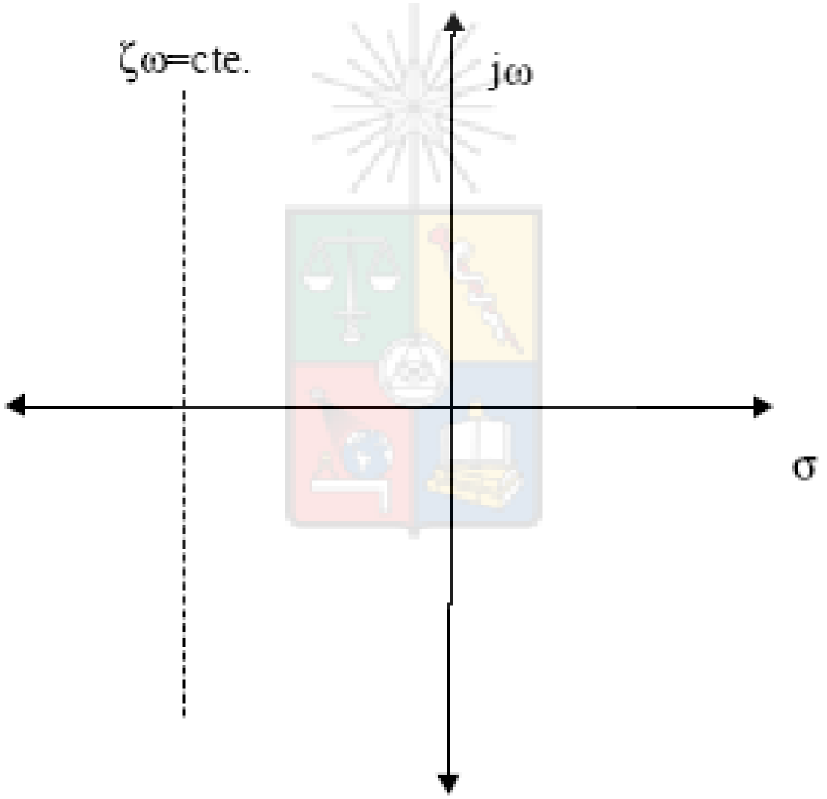
3) Todas las combinaciones posibles, de polos a lazo cerrado, que entregan un coeficiente de amortiguamiento ζ forman una línea recta. Esto se muestra en la siguiente figura:



UNIVERSIDAD DE CHILE

Compensación PI

Todos los polos de lazo cerrado que entregan una respuesta con similar tiempo de establecimiento forman una línea recta perpendicular con el eje real.



Compensación Utilizando Control PI

- El controlador PI está compuesto por tres términos, la parte proporcional, la parte integral y la parte derivativa. La función de transferencia ideal de este controlador es:

$$u(s) = \left(K_p + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) e(s)$$

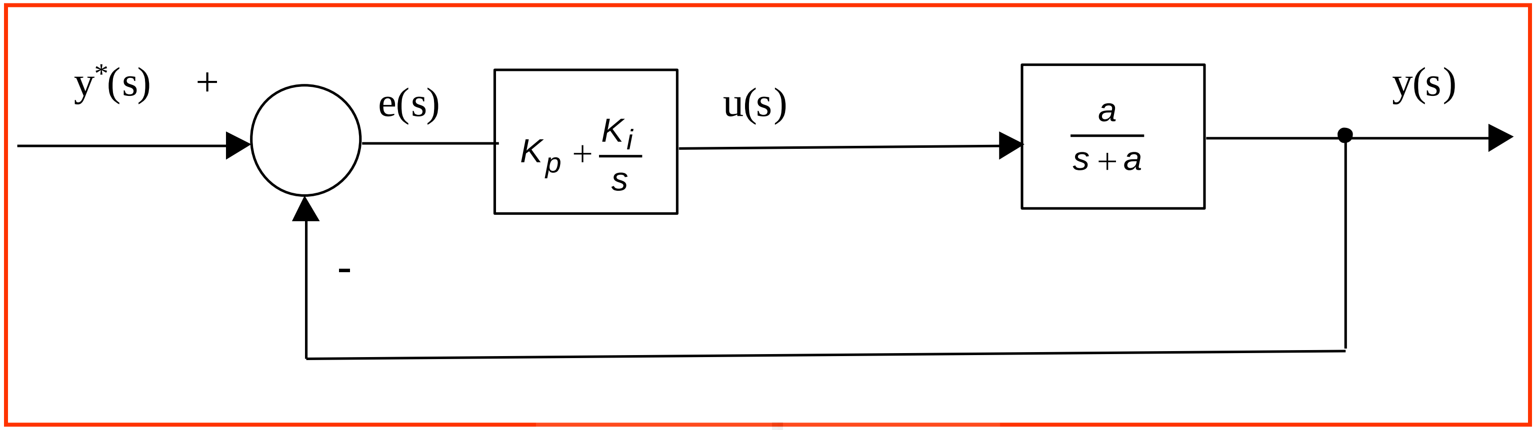
- En mi área de trabajo, el PID no se utiliza demasiado ya que habitualmente, las máquinas eléctricas y sistemas de primer orden en general, se regulan utilizando controladores PI, lo que significa que *Td* = 0 en la ecuación anterior.
- El PID y sus aplicaciones será discutido en el futuro.

Diseño de un controlador tipo PI.

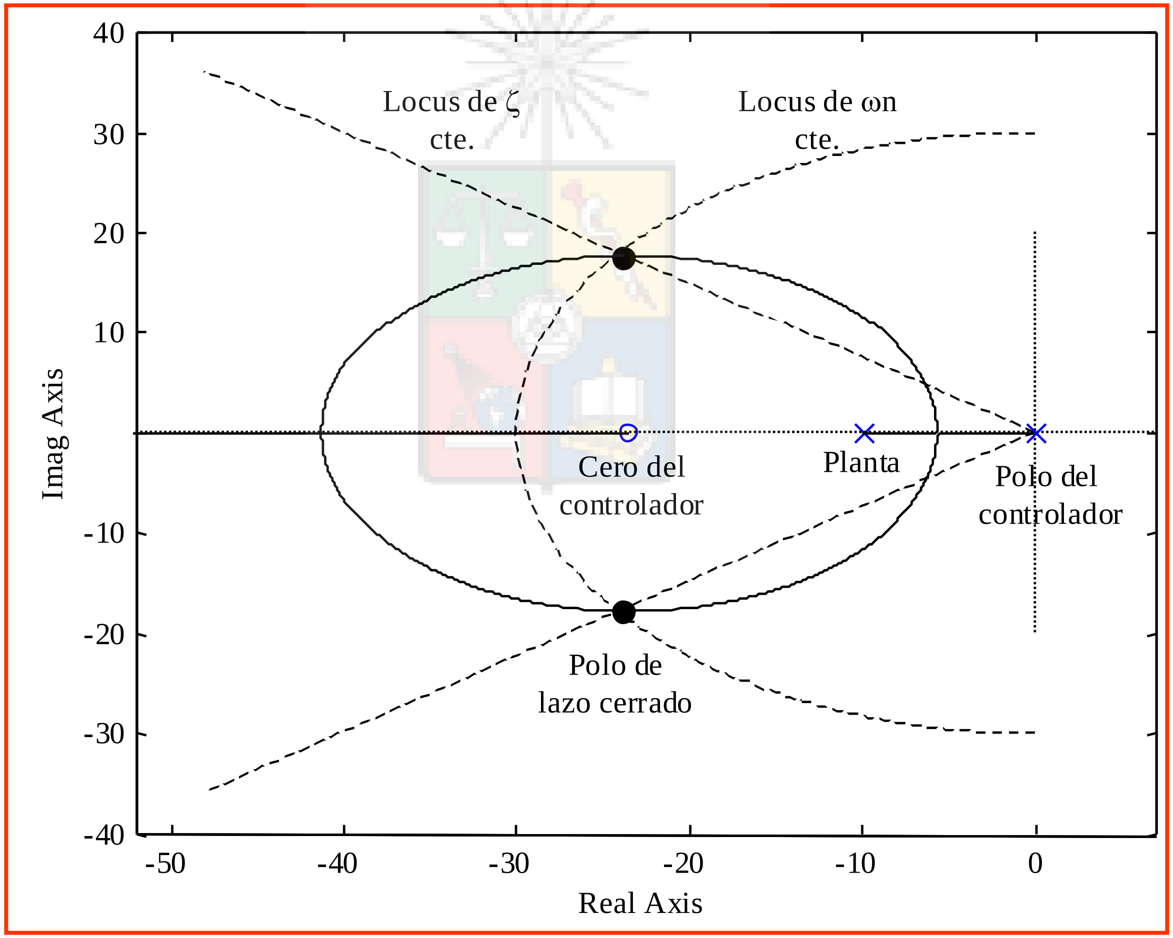
- El método mas utilizado para controlar una planta de primer orden, de acuerdo a las especificaciones entregadas anteriormente, es utilizar un controlador tipo PI. En este caso el controlador tiene la forma:

$$\boxed{\frac{u(s)}{e(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} \Rightarrow \frac{u(s)}{e(s)} = \frac{K_p(s + K_i / K_p)}{s}}$$

- Donde e(s) es el error, u(s) la señal de salida del controlador, K_p la constante proporcional y K_i la constante integral del controlador. La siguiente figura muestra el sistema de control incluyendo el controlador:



y*(s)
+
e(s)
$K_p + \frac{K_i}{s}$
u(s)
$\frac{a}{s+a}$
y(s)
-



Locus de ζ cte.
Locus de ωn cte.
Cero del controlador
Planta
Polo del controlador
Polo de lazo cerrado
Imag Axis
Real Axis
40
30
20
10
-10
-20
-30
-40
-50
-40
-30
-20
-10
0

Recordando que los ceros de lazo cerrado son los ceros de G(s) y/o los polos de H(s), para un diseño como el mostrado en la Fig., la función de transferencia a lazo cerrado es:

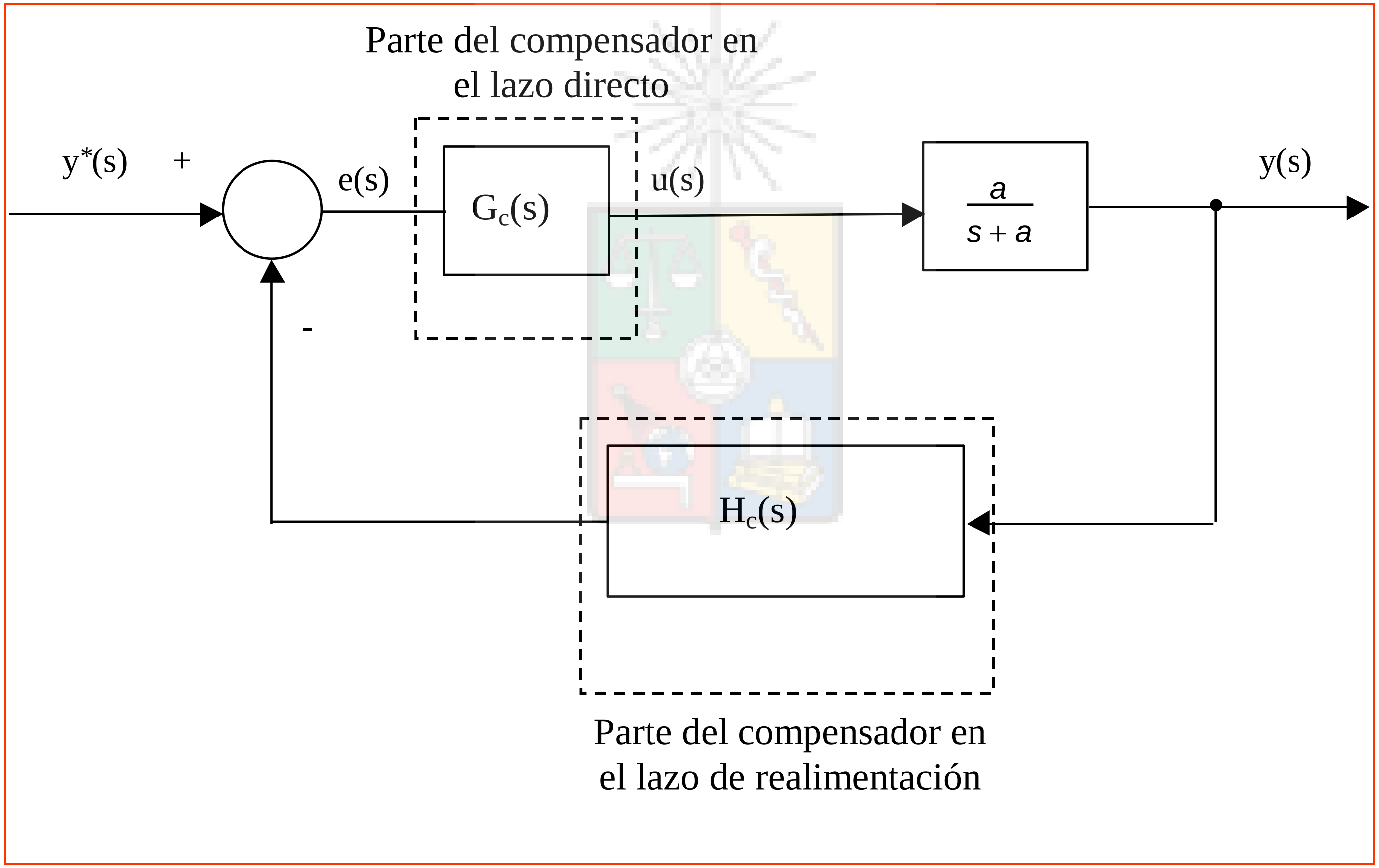
$$\frac{y(s)}{y^*(s)} = \frac{\omega_n^2 K_p}{K_i} \frac{(s + K_i / K_p)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

La principal desventaja de un controlador PI es que el cero del controlador forma parte de la función de transferencia a lazo cerrado y que en muchas oportunidades no es posible alejar este cero de los polos dominantes de lazo cerrado.

Como se ha señalado anteriormente, cuando el cero se encuentra cerca de la parte real de los polos dominantes de lazo cerrado, el sobrepaso de la respuesta en el tiempo puede alcanzar valores altos, por encima de lo especificado.

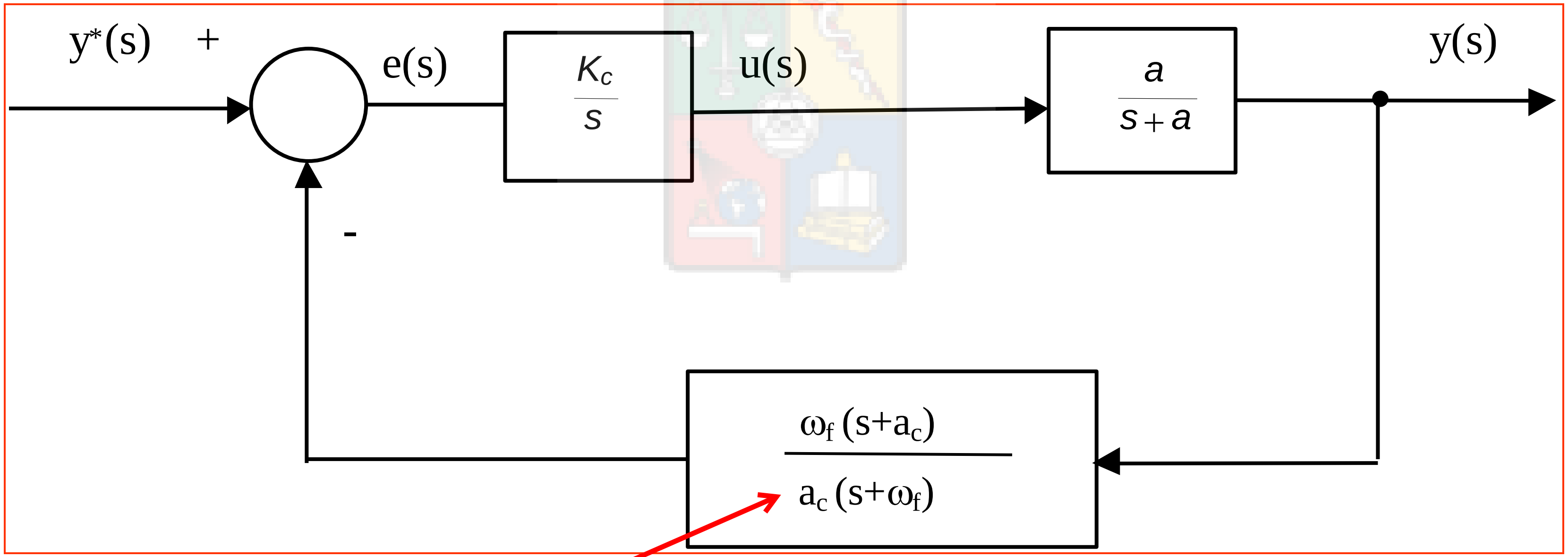
Cuando es necesario evitar los sobrepasos excesivos, se deben utilizar otro tipo de controladores como los que se discuten a continuación.

Compensación en el lazo de realimentación.



Al menos en mi área de trabajo este tipo de compensación no es muy utilizada

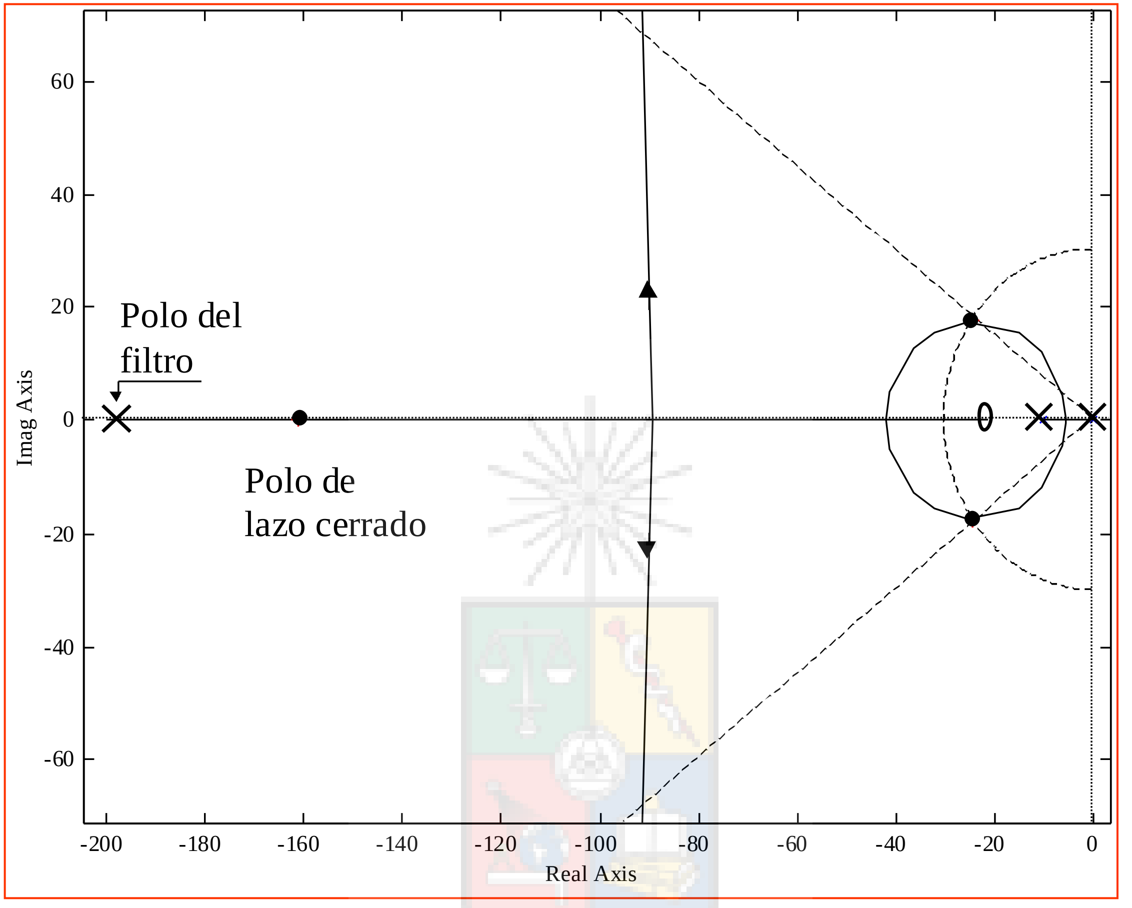
Cuando se efectúa compensación en el lazo de realimentación una parte o todo el controlador se implementa en este lazo. Para el caso del controlador PI discutido en la sección anterior, el cero del controlador se puede colocar en el lazo de realimentación mientras que el integrador se mantiene en el lazo directo. El sistema de control se muestra en la siguiente figura:



Se debe agregar un polo junto al cero ya que la función de transferencia debe ser propia.

El cero a_c del controlador se encuentra en el lazo de realimentación. Para obtener una función propia, el término $(s+a_c)$ es dividido por el filtro $(s+\omega_f)$. De esta manera se evita que el ruido de alta frecuencia presente en la medición sea amplificado excesivamente.

Idealmente los filtros utilizados en un sistema de control deben tener sus polos alejados de los polos dominantes de lazo cerrado. En otras palabras si se necesita una frecuencia natural ω_n de 100 $rads^{-1}$ lo ideal es que la frecuencia ω_f sea mayor de $1000\zeta rads^{-1}$ $(\omega_f > 10\omega_n\zeta)$. En este caso el filtro no interfiere con la dinámica del sistema y se logra el mismo resultado diseñando el sistema considerando/sin considerar los polos del filtro.



El lugar de la raíz obtenido ahora es casi igual al que se muestra en la Fig anterior con la diferencia de que existe el polo del filtro y que se necesita una ganancia distinta en el controlador para ubicar los polos de lazo cerrado en laposición requerida (para una misma planta, e idénticos valores de ω_n, ζ, laubicación del cero a_c debería estar muy cerca del cero del controlador PI discutido anteriormente).

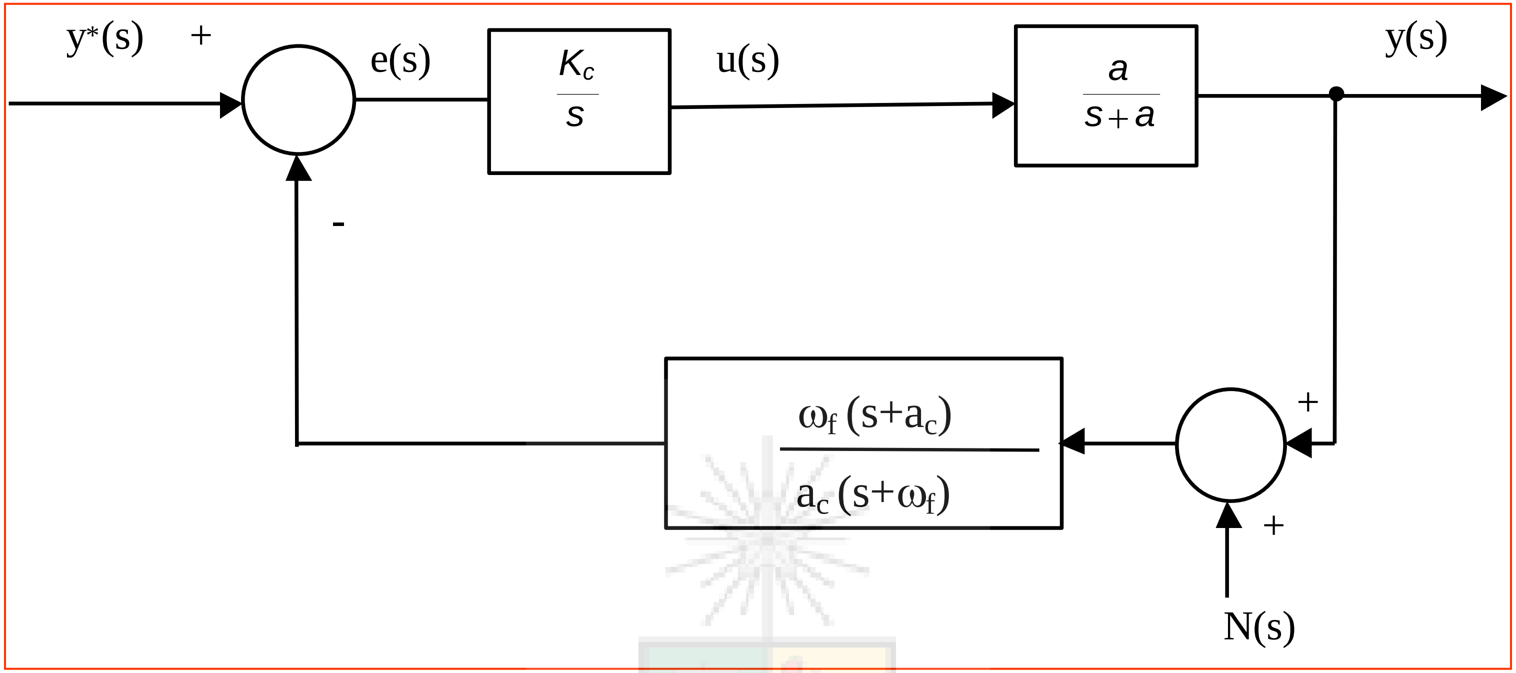
Universidad de Chile

Existen dos inconvenientes al compensar en el lazo de realimentación. El primero es que los ceros tienen la propiedad de amplificar el ruido de alta frecuencia. Si consideramos un cero en el origen, este es equivalente a efectuar la derivada en el tiempo, por lo tanto, si se tiene un ruido de la forma $N(t)=A_m \operatorname{sen}(\omega t)$ se tiene:

$$\boxed{s\,N(s) = \frac{dN(t)}{dt} = A_m \omega \cos(\omega t)}$$

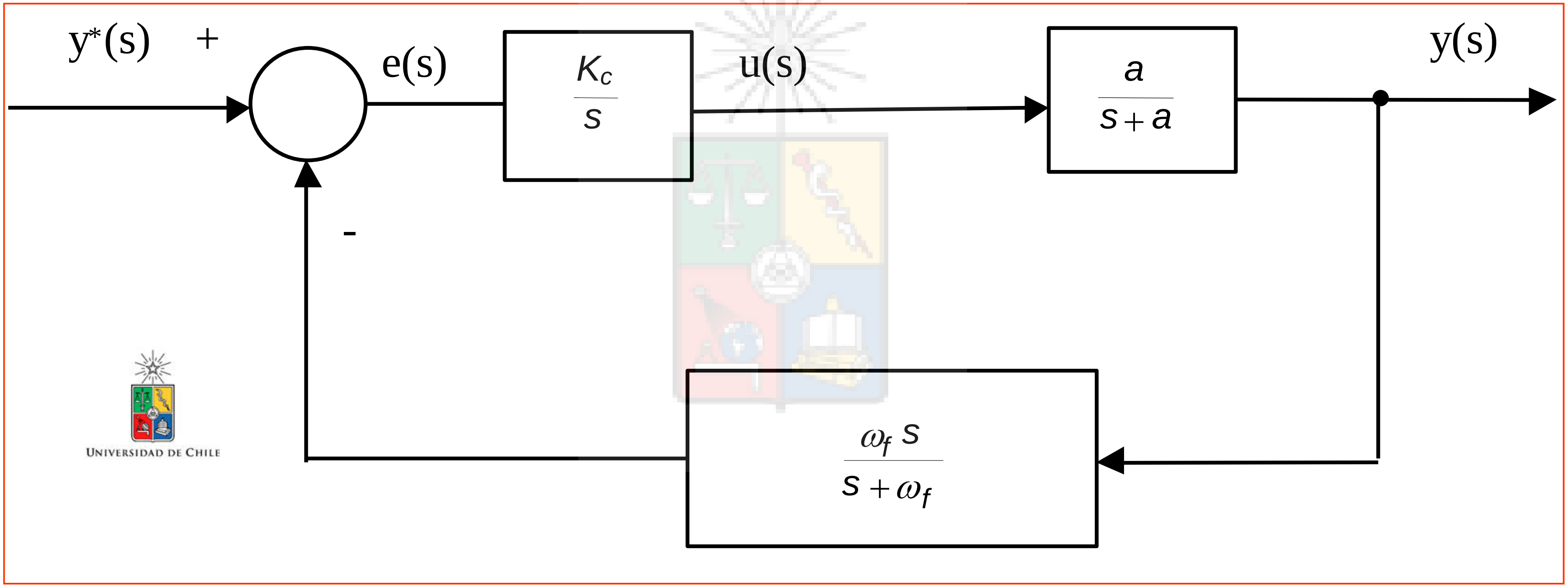
Por lo tanto el ruido a la salida del derivador se ha amplificado por ω. El caso de un cero en el origen es un ejemplo, pero recuerde que para las altas frecuencias todo cero tiende a comportarse como amplificador de ruido.

die



En otras palabras la configuración de polos y ceros de lazo cerrado puede ser ventajosa desde el punto de vista de la referencia o entrada al sistema de control pero pueden existir otras desventajas cuando se analizan los inconvenientes ocasionados por el ruido. Esto no significa que el uso de ceros en el lazo de realimentación debe descartarse completamente.

El otro inconveniente que existe al utilizar compensación en la realimentación es que se afecta a la medición y existe el riesgo de, por ejemplo, transformar un sistema de control de posición en control de velocidad. Esto se muestra en la Fig.

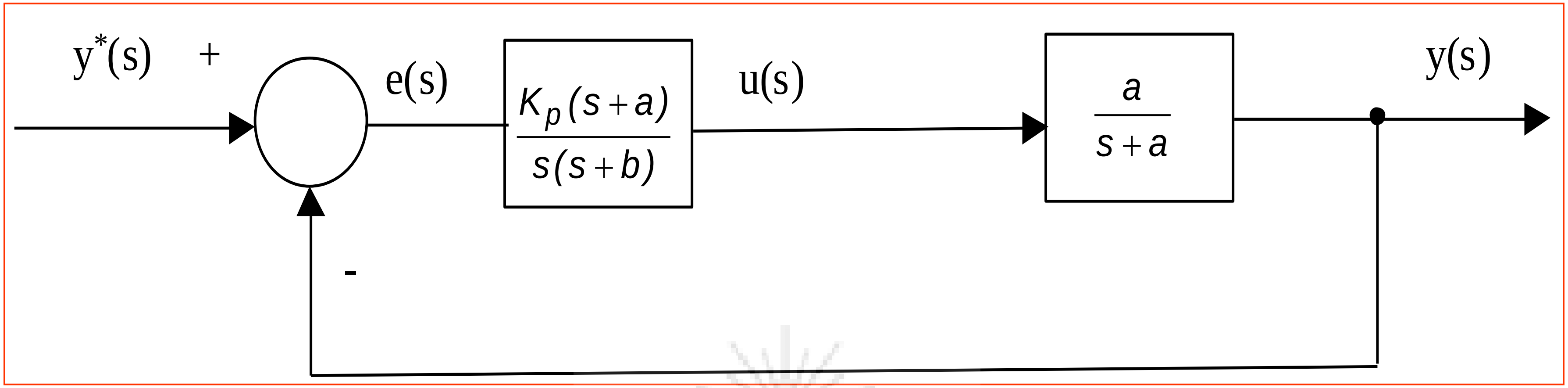


Este es un ejemplo algo extremo. Sería poco razonable colocar un derivador en un lazo de realimentación a menos que efectivamente se busque derivar, por ejemplo para obtener la velocidad rotacional a partir de la posición angular.

Compensación por Cancelación

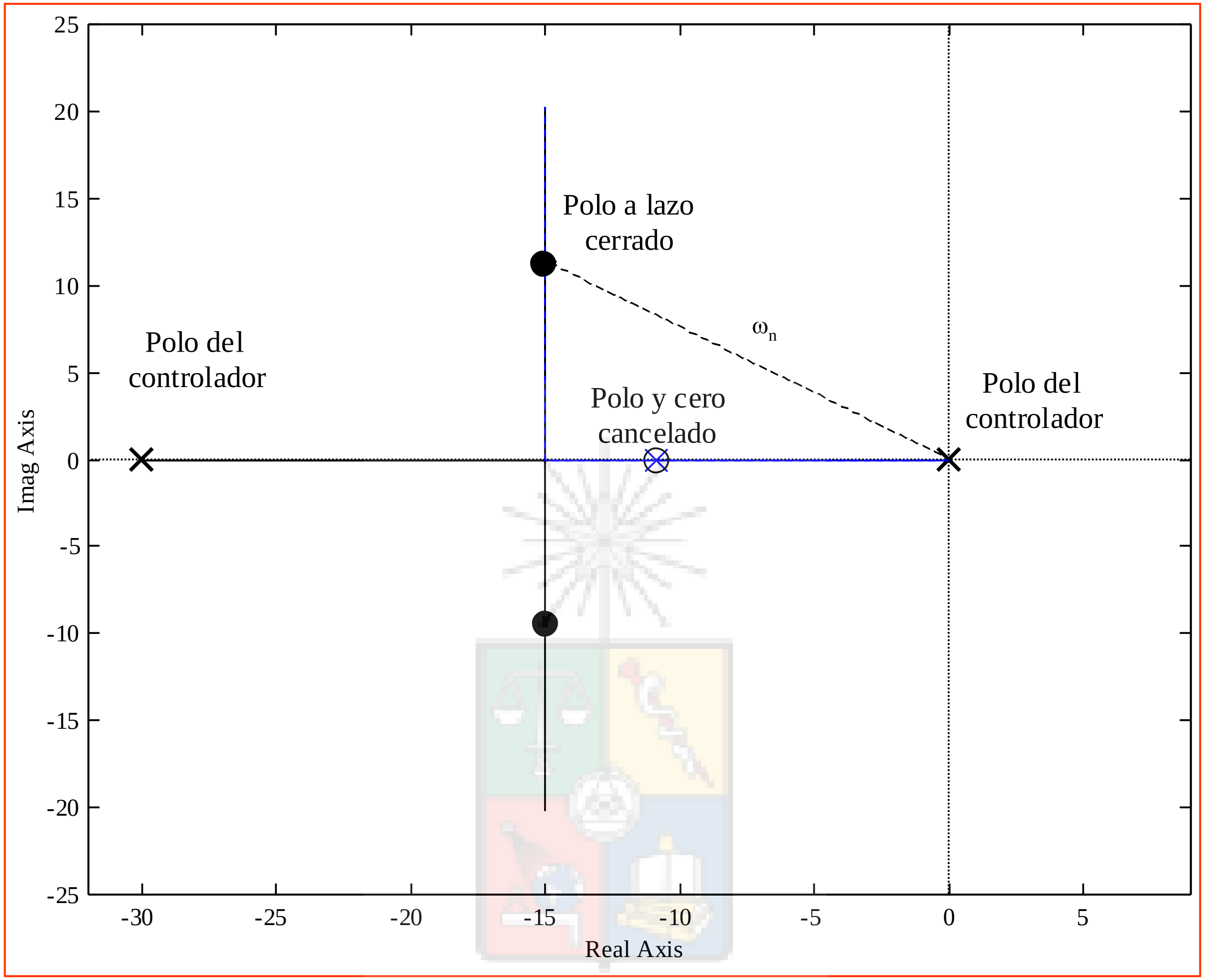
Compensación por cancelación

- Una de las mejores alternativas al diseñar sistema de control es cancelar los elementos de la planta. Es decir, si el controlador considera un cero este debe ubicarse sobre uno de los polos de la planta. La siguiente figura muestra un sistema de control donde se ha aplicado cancelación:



En este sistema el cero del controlador se ha utilizado para eliminar el polo de la planta de primer orden. De esta forma el cero del controlador desaparece de la función de transferencia a lazo cerrado y se elimina el sobrepaso. El lugar de la raíz para este caso es:

UNIVERSIDAD DE CHILE

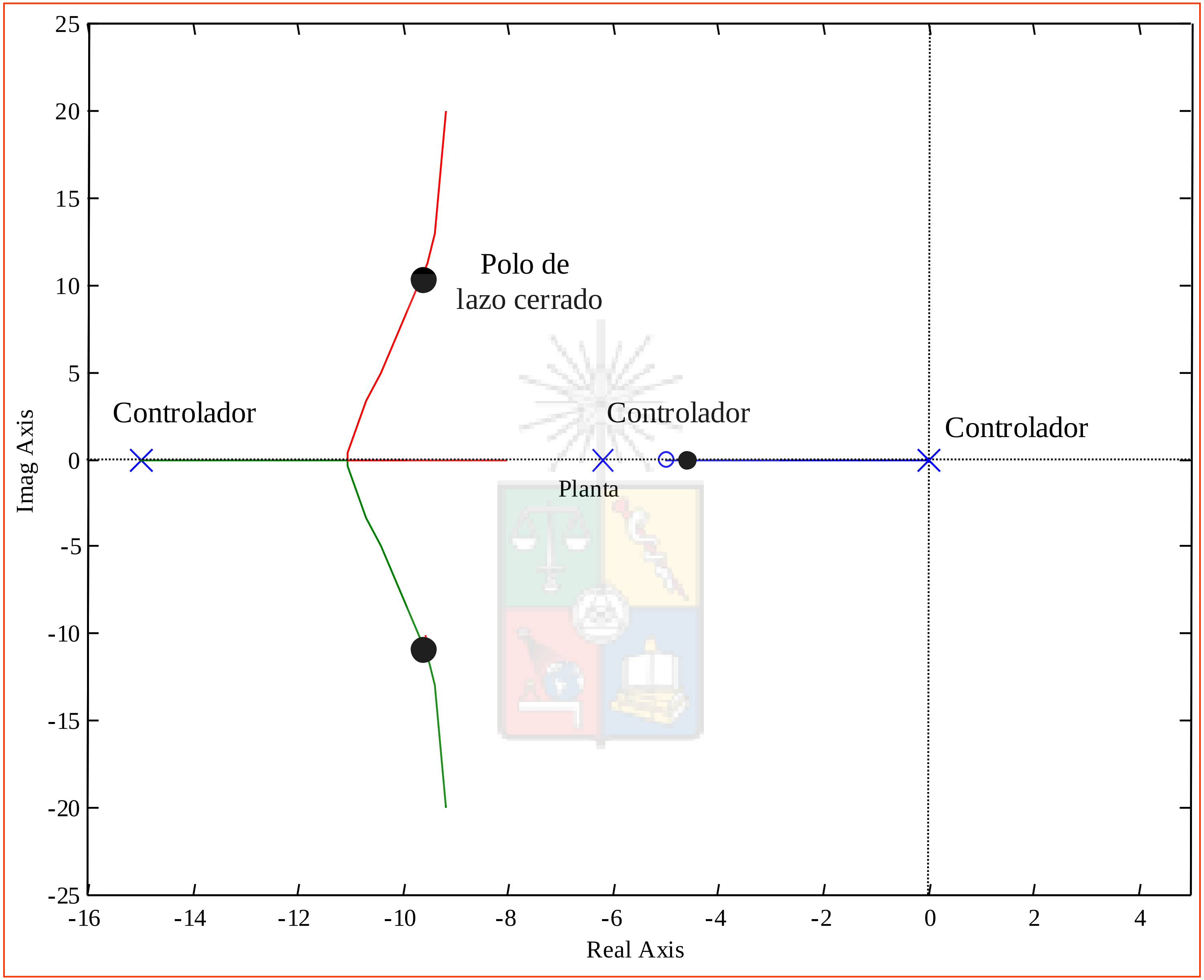


La función de transferencia a lazo cerrado corresponde a un sistema de segundo orden ideal y si el coeficiente de amortiguamiento es apropiado el sobrepaso es bajo. Esta estrategia de control necesita un controlador ligeramente mas complicado.

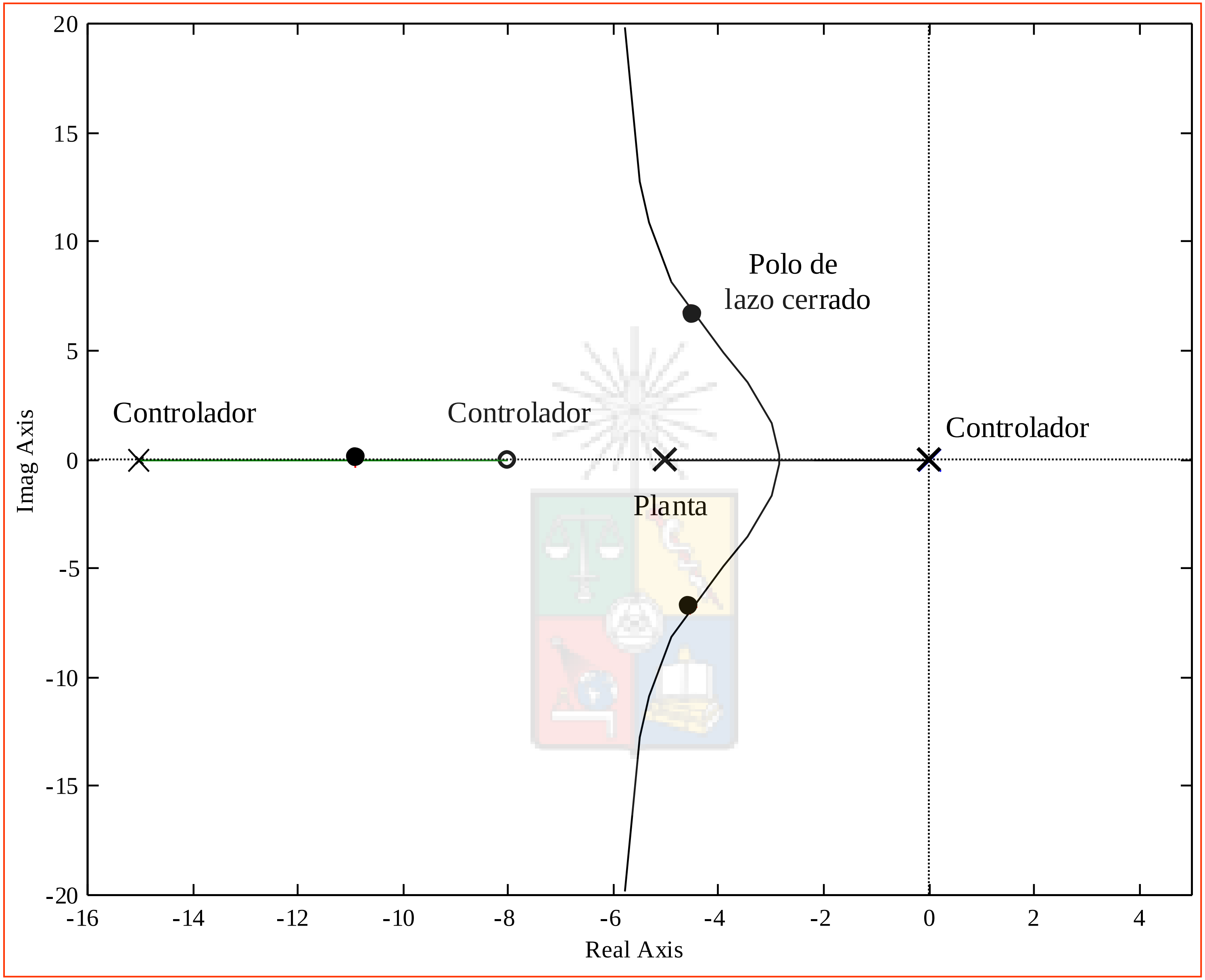
La posición de los polos y ceros no es fija y algunos de ellos cambian su ubicación en el plano s de acuerdo a las condiciones existentes en el sistema. Un ejemplo de esto es lo que sucede en la puerta mecánica de un motor. Si el motor esta conectada a una carga mecánica pasiva se tiene:

$$T_e = B\omega + J\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \omega = \frac{T_e}{J(s + B/J)}$$

Donde T_e es una función de la corriente del motor. Si la carga es una correa transportadora o un molino en que se esta triturando material, el polo B/J de es móvil y tiene un amplio desplazamiento dependiendo de la fricción e inercia. Si se implementa un sistema de control utilizando cancelación es posible de que el sistema opere adecuadamente para un cierto rango de carga y entregue una respuesta incorrecta en otras condiciones de operación.



Cancelación imperfecta del polo de la planta

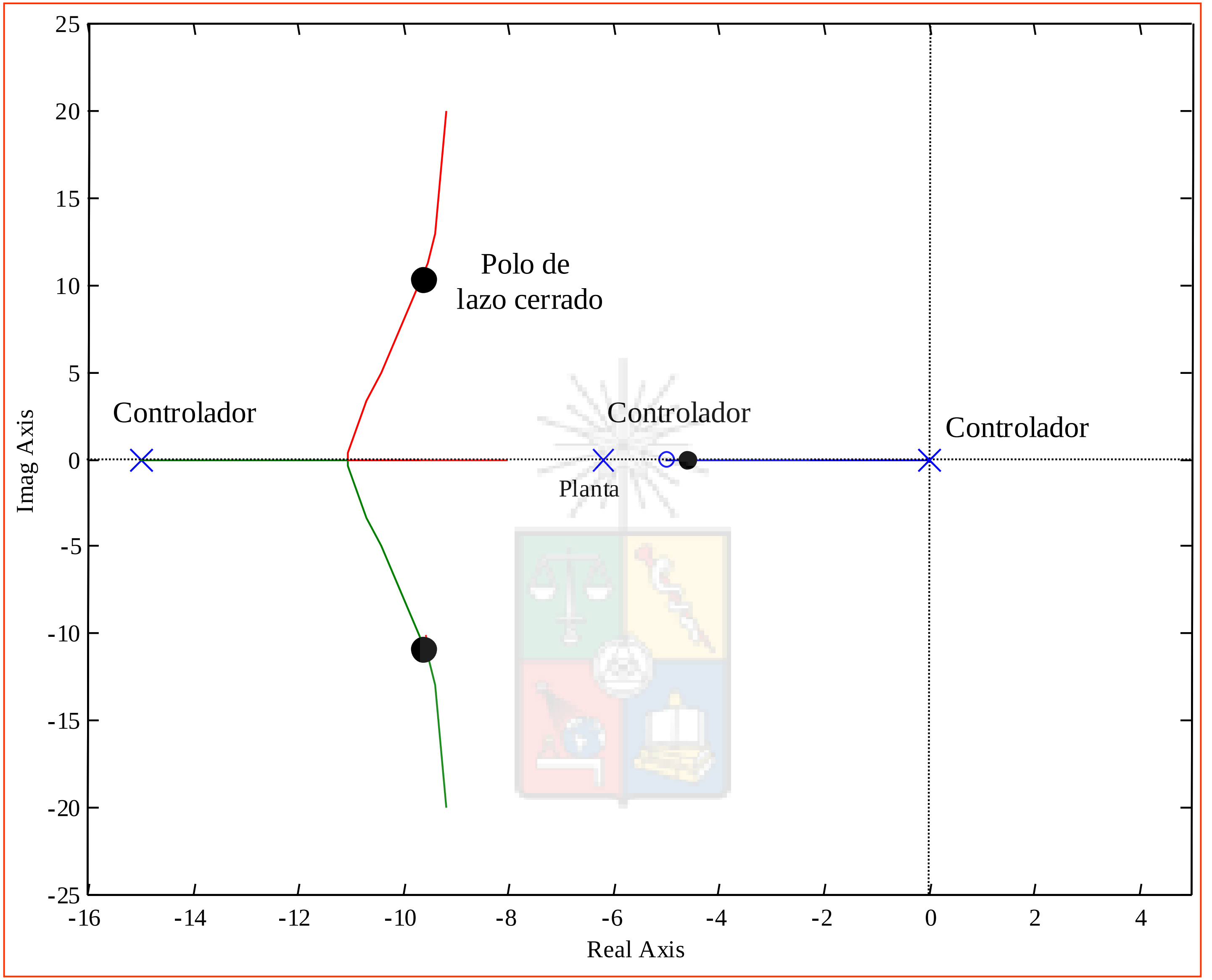


Cancelación imperfecta del polo de la planta.

No se puede concluir sin embargo que compensación por cancelación es una técnica inadecuada debido a que es imposible cancelar exactamente un polo o un cero. En algunas aplicaciones la variabilidad de los elementos de la planta aunque existente es reducida.

Este es el caso por ejemplo del polo R/L del devanado de un motor. En motores de mediana y alta potencia la variación del término R/L con la temperatura esta lejos de los rangos de variación presente en la puerta mecánica del motor.

Se puede demostrar fácilmente que cuando la cancelación de polos y ceros no es perfecta, pero tampoco el cero se encuentra muy alejado del polo, el sistema opera apropiadamente a pesar de la existencia de una raíz lenta.



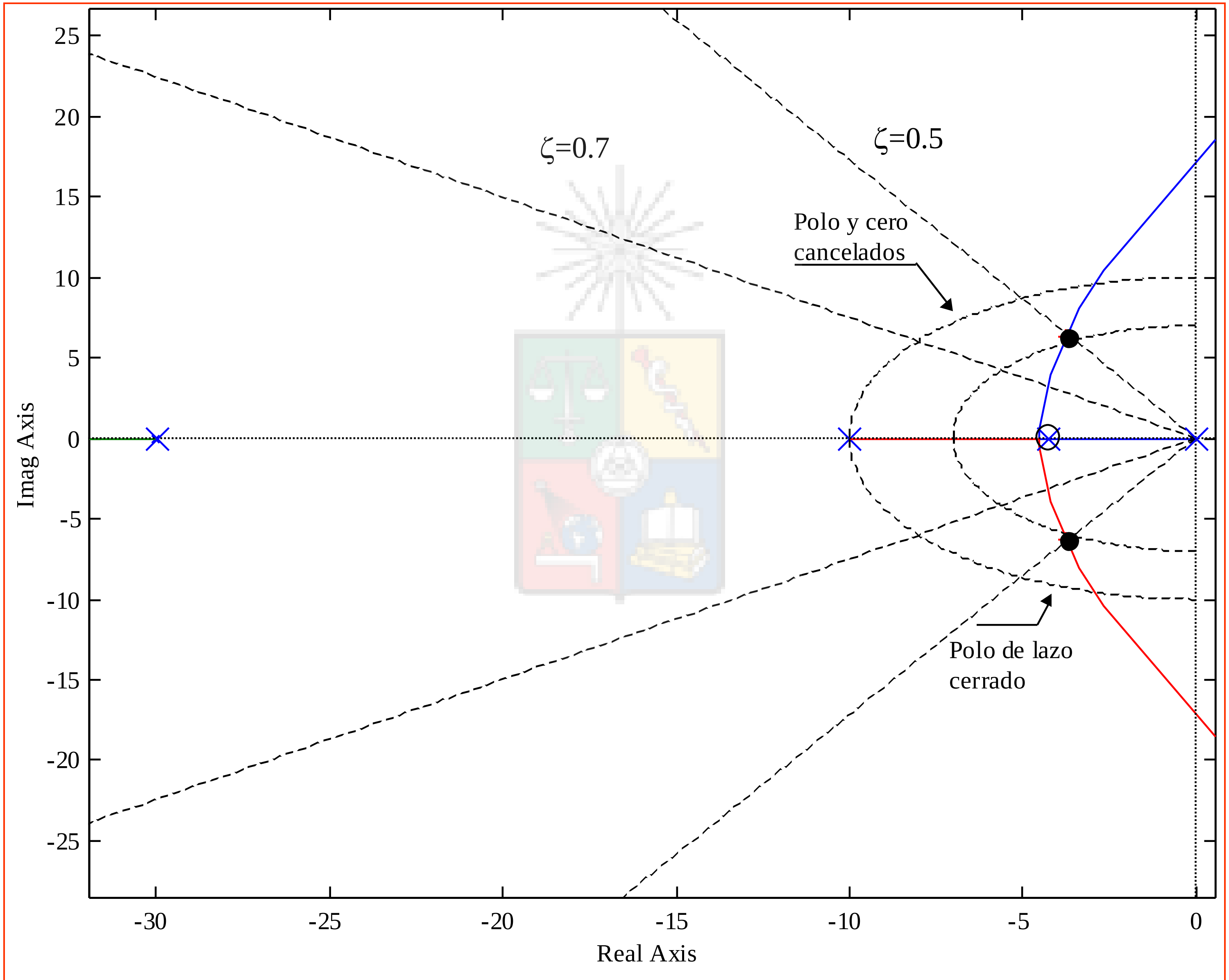
$$\frac{y}{y^*} = \frac{\omega_n^2(a+\Delta a)}{a} \frac{(s+a)}{(s+a+\Delta a)(s^2+2\zeta\omega_s s+\omega_n^2)}$$

El cero del controlador se encuentra en el numerador de la función de lazo cerrado. Existen tres polos de lazo cerrados. Dos de ellos complejos conjugados y uno de ellos que se encuentra ubicado en en a + Δa (muy cerca del cero). Si Δa es un valor muy pequeño, cercano a cero, entonces se puede asumir que el cero y el polo de lazo cerrado se cancelan entre ellos y el sistema es de segundo orden ideal.

Compensación por cancelación se utiliza no solo con plantas de primer orden sino con plantas de orden n. Por ejemplo si se tiene la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

$$G(s) = \frac{1}{(s+5)(s+10)(s+30)} \qquad H(s) = 1$$

Si se utiliza un controlador PI (el cual no siempre es apropiado para sistemas con tres o mas polos) se debe colocar un polo en el origen y luego con el cero cancelar el polo de lazo abierto mas lento.

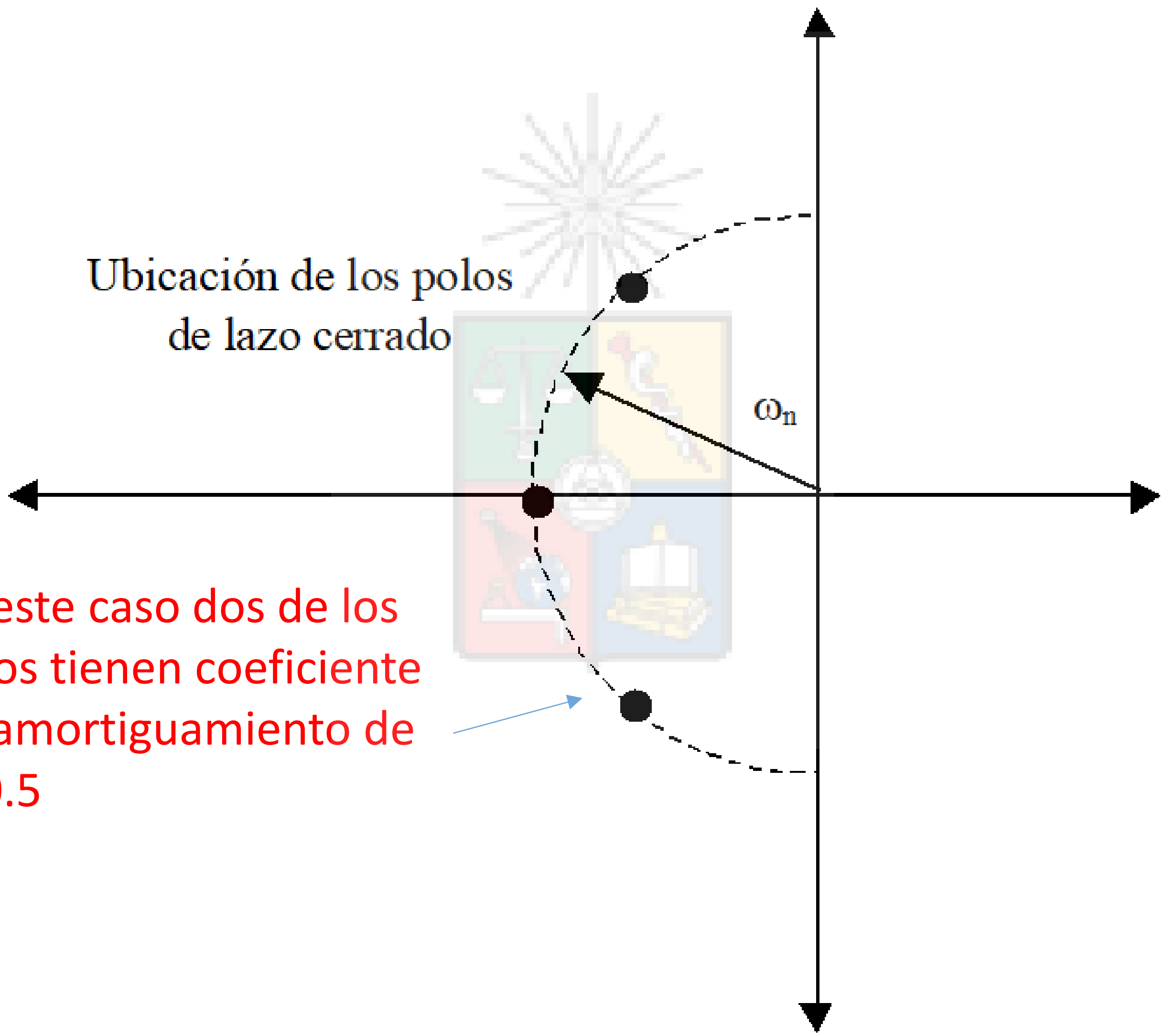


Compensación tipo Butterworth

Compensación tipo Butterworth

- Se utiliza en sistemas que ya son Tipo 1, y donde se desea llevar el sistema a Tipo 2, para obtener cero error en estado estacionario a entrada rampa.
- La denominada "compensación tipo Butterworth" es discutida en el D'azzo and Houpis, *Linear Control System Analysis and Design With Matlab.* Es una de la alternativas posibles (existen otras) para compensar en un sistema Tipo 1.
- En este caso se intenta que los polos de lazo cerrado queden ubicados como los de un filtro de Butterworth de orden *n*.
- En general los filtros de Butterworth tienen una respuesta en frecuencia muy plana y sus respuestas en el tiempo son aceptables en términos de sobrepaso y tiempo de establecimiento.

Compensación tipo Butterworth utilizada para ubicar tres polos dominantes



En este caso dos de los polos tienen coeficiente de amortiguamiento de ζ=0.5

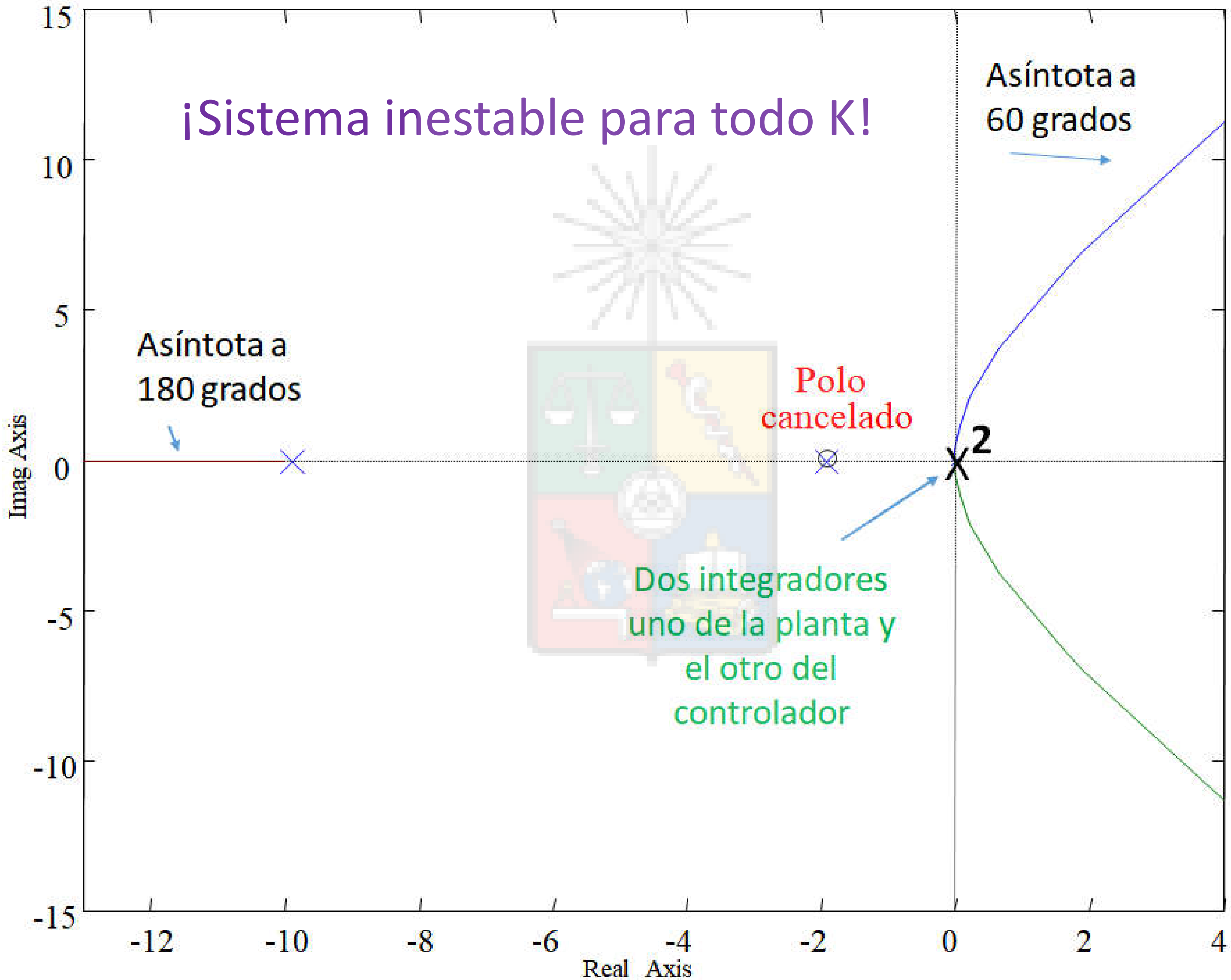
Ejemplo

- Suponga que se tiene la siguiente planta, la que se desea controlar para obtener cero error en estacionario a entrada rampa.

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+10)}$$

- ¿Qué sucede si es que se aplica cancelación y se intenta eliminar el polo más lento en s=2?

Ejemplo



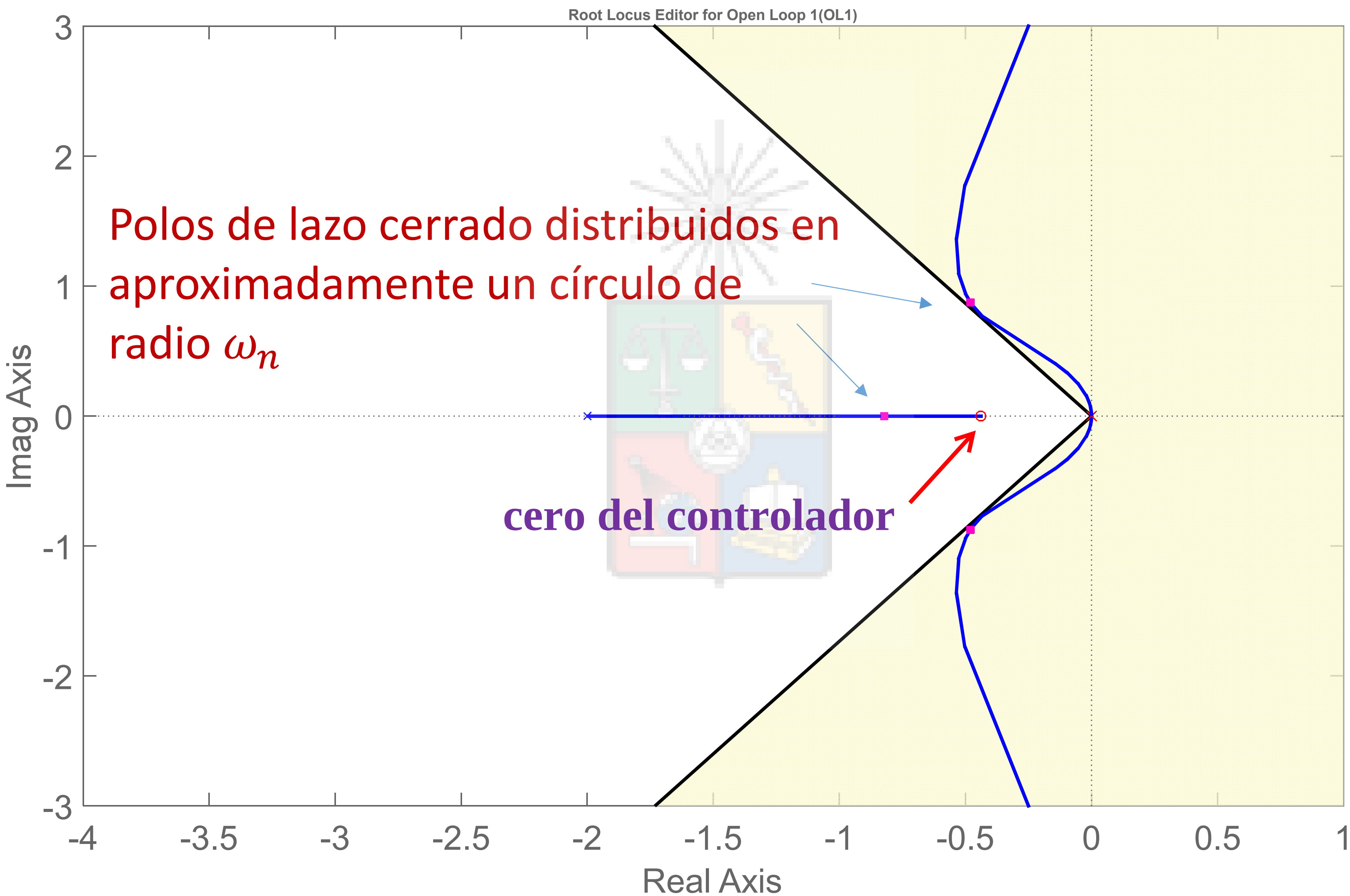
¡Sistema inestable para todo K!
Asíntota a
60 grados
Asíntota a
180 grados
Polo
cancelado
2
Dos integradores
uno de la planta y
el otro del
controlador
15
10
5
0
-5
-10
-15
-12
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
Imag Axis
Real Axis

Metodología propuesta

(la demostración y un ejemplo se encuentran en los apuntes)

- Identifique el polo más lento que no esté en el origen. En este caso se tiene que s=d=-2.
- Coloque el cero del PI en la posición d/4.
- Utilizando prueba y error con el lugar de la raíz, localice el cero del controlador alrededor de d/4 hasta lograr ubicar los polos de lazo cerrado de la forma propuesta en la compensación tipo Butterworth.
- Se pueden utilizar otras formas de compensación para lograr cero error en estado estacionario a entrada rampa, en un sistema tipo 1, pero en general la compensación tipo Butterworth permite utilizar un simple PI.

Root Locus



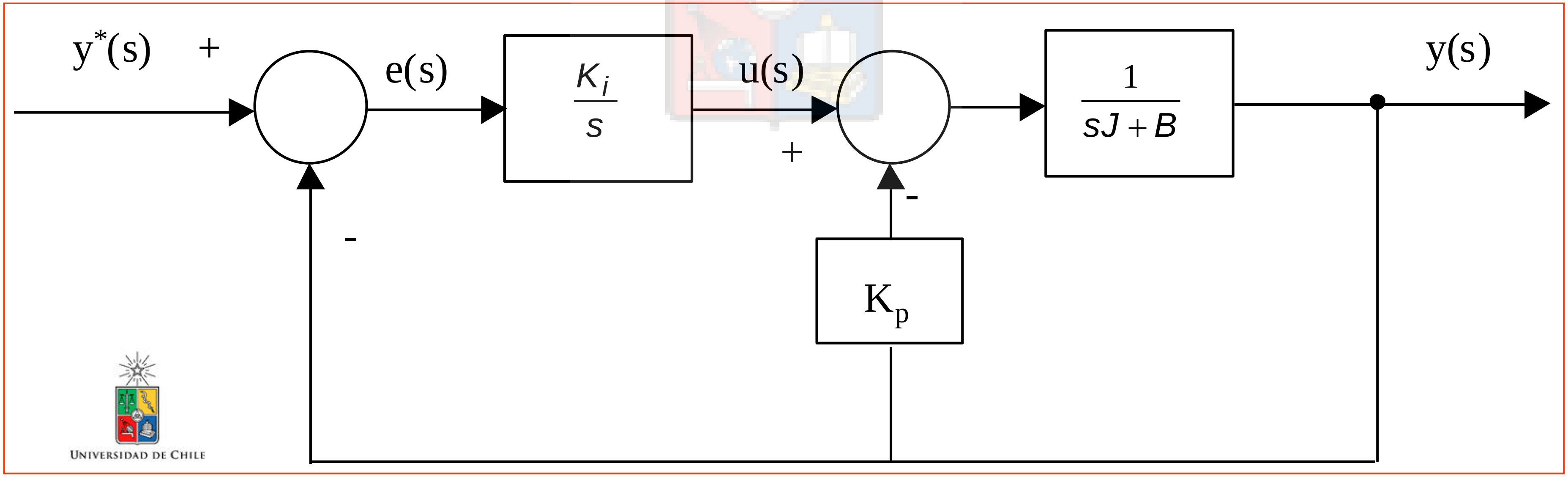
Root Locus Editor for Open Loop 1(OL1)
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
Real Axis
Imag Axis
Polos de lazo cerrado distribuidos en aproximadamente un círculo de radio ω_n
cero del controlador

UNIVERSIDAD DE CHILE

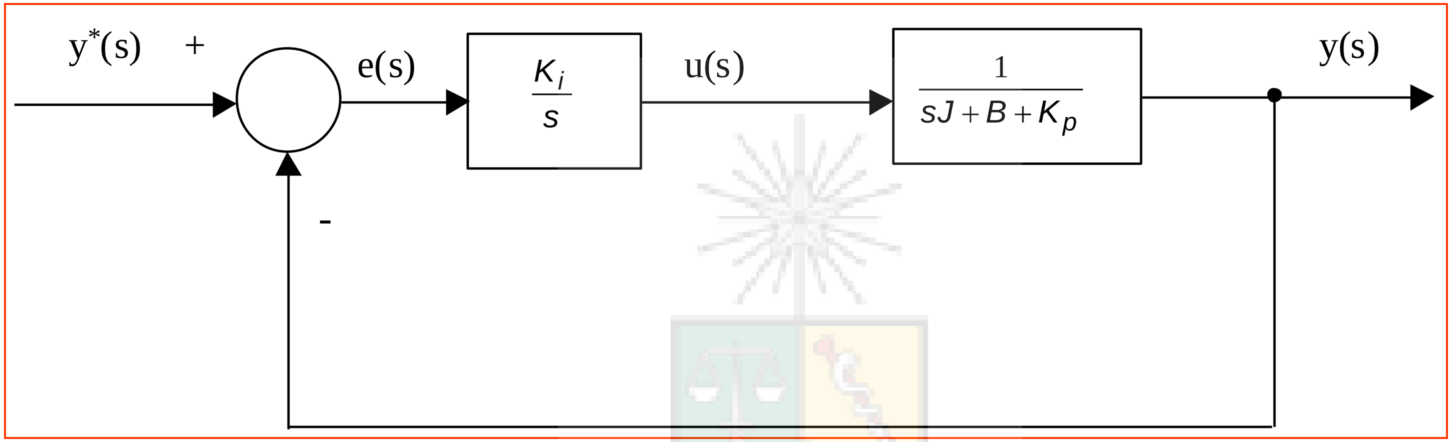
Compensación tipo IP

Compensación tipo IP

- Otras de las configuraciones de control utilizadas, especialmente en el caso de plantas de primer orden, es el controlador IP. La siguiente figura muestra un controlador IP incluyendo la planta de primer orden que considera inercia J y coeficiente viscoso de fricción B.



Utilizando reducción de bloques, la siguiente figura se obtiene de la Fig.:



Finalmente, utilizando reducción de bloques la relación entrada salida puede escribirse como:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_i}{J}}$$

$$\zeta = \frac{B+K_p}{2\sqrt{JK_i}}$$

Cuando se utiliza el controlador IP se eliminan los ceros de lazo cerrado, reduciendo los sobrepasos, pero la posición de los polos de lazo cerrado puede ser muy sensible a los cambios en los parámetros. Por ejemplo, el aumento en el valor de la inercia J, disminuirá la frecuencia natural ω_n y el coeficiente de amortiguamiento ζ.

Sensibilidad ante los cambios de parámetros es una de las característica de los controladores IP.

Comentarios acerca de los métodos propuestos

- En estas diapositivas se han discutido algunos métodos de diseño, como por ejemplo:
  - Compensación utilizando PI.
  - Compensación utilizando cancelación.
  - Compensación Butterworth.
  - Compensación en el lazo de realimentación.
  - Compensador IP.
- Todos estos métodos tienen ventajas y desventajas. Por ejemplo, el PI tiene un cero que amplifica el sobrepaso. El IP es más sensible a la variación de los parámetros. El compensador por cancelación puede tener mal comportamiento en la presencia de polos que se mueven en una amplio rango en la planta.
- El que todos los controladores tengan problemas, no significa que no deban ser utilizados. No existe el controlador perfecto, solo controladores que funcionan mejor que otros en algunas aplicaciones.