Fracciones Parciales

Fracciones Propias e Impropias

Definición 1 *Se dice que una función racional* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *es una* **fracción propia***, si el grado del polinomio* $P(x)$ *es menor que el grado del polinomio* $Q(x)$*. En caso contrario, es decir, si el grado de* $P(x)$ *es mayor o igual al de* $Q(x)$*, la fracción se llama* **impropia***.*

Toda fracción impropia se puede expresar, efectuando la división, como la suma de un polinomio mas una fracción propia.

Es decir,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \{polinomio\} + \frac{N_1(x)}{Q(x)}$$

Caso 1 El denominador $q(x)$ es un producto de factores lineales distintos.

Esto significa que podemos escribir

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_kx + b_k)$$

en donde no hay factor que se repita. En este caso, existen constantes $A_1, A_2, \cdots, A_k$ tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

Ejemplo Descomponer en fracciones parciales la fracción:

1. $\dfrac{7x + 3}{x^2 + 3x - 4}$

   Solución Tenemos que el denominador se puede descomponer en factores simples como sigue:

   $$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$$

   Luego la descomposición en fracciones parciales es:

   $$\frac{7x + 3}{x^2 + 3x - 4} = \frac{7x + 3}{(x + 4)(x - 1)} = \frac{A}{x + 4} + \frac{B}{x - 1}$$

   Para encontrar los valores de A y B, multiplicamos la igualdad por $(x + 4)(x - 1)$, obteniendo

   $$7x + 3 = A(x - 1) + B(x + 4)$$

   desarrollando se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

   $$\begin{array}{rcl} A + B & = & 7 \\ -A + 4B & = & 3 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad A = 5, \;\; B = 2$$

   Por lo que la fracción original queda:

$$\frac{7x+3}{x^2+3x-4} == \frac{5}{x+4} + \frac{2}{x-1}$$

2. $\dfrac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}$

   Solución Se tiene que el denominador se puede factorizar como sigue:

$$2x^3+3x^2-2x = x(2x^2+3x-2 = x(2x-1)(x+2)$$

   Luego, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2}$$

   multiplicando ambos lados de la igualdad por el factor común, y luego resolviendo la ecuación, se obtiene

$$x^2+2x-1 = A(2x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(2x-1)$$

   con

$$A = \frac{1}{2},\ \ B = \frac{1}{5} \ \text{ y } \ C = -\frac{1}{10}$$

   así

$$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{5}}{2x-1} + \frac{-\frac{1}{10}}{x+2}$$

Caso 2 El denominador $q(x)$ es un producto de factores lineales, algunos de los cuales se repiten.

Si $Q(x)$ tiene un factor lineal repetido k veces de la forma $(a_1x+b_1)^k$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene k términos de la forma:

$$\frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(a_1x+b_1)^k}$$

donde A_1, $A_2, \cdots, A_k$ son constantes.

Ejemplo Descomponer en fracciones parciales:

1. $\dfrac{5x^2-36x+48}{x(x-4)^2}$

   Solución La descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{5x^2-36x+48}{x(x-4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-4)} + \frac{C}{(x-4)^2}$$

multiplicando ambos miembros de la igualdad por el denominador común

$$5x^2 - 36x + 48 = A(x-4)^2 + Bx(x-4) + Cx$$

obteniendo el sistema:

$$\begin{array}{rcl} A + B &=& 5 \\ -8A - 4B + C &=& -36 \\ 16A &=& 48 \end{array} \qquad \text{de donde} \qquad A = 3,\ B = 2,\ C = -4$$

Luego:

$$\frac{5x^2 - 36x + 48}{x(x-4)^2} = \frac{3}{x} + \frac{2}{(x-4)} - \frac{4}{(x-4)^2}$$

2. $\dfrac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$

Solución Comenzaremos por dividir los polinomios

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

luego, factorizando el polinomio $q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ resulta

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$$

Por lo tanto, su descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

del cual de obtiene: $A = 1$, $B = 2$ y $C = -1$, de modo que

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1}$$

Caso 3 El denominador $q(x)$ contiene factores cuadráticos irreductibles, ninguno de los cuales se repite.

Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático no repetido de la forma $ax^2 + bx + c$, en donde, $b^2 - 4ac < 0$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene un término de la forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

donde A y B son constantes.

Ejemplo Descomponer en fracciones parciales:

1. $\dfrac{4x^2 - 8x + 1}{x^3 - x + 6}$

Tenemos que

$$\frac{4x^2 - 8x + 1}{x^3 - x + 6} = \frac{4x^2 - 8x + 1}{(x+2)(x^2 - 2x + 3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 3}$$

multiplicando por el común denominador:

$$4x^2 - 8x + 1 = A(x^2 - 2x + 3) + Bx + C(x + 2)$$

obteniendo el sistema

$$\begin{array}{rcl} A + B & = & 4 \\ -2A + 2B + C & = & -8 \\ 3A + 2C & = & 1 \end{array} \qquad \text{de donde} \qquad A = 3,\ B = 1,\ C = -4$$

Por lo tanto,

$$\frac{4x^2 - 8x + 1}{x^3 - x + 6} = \frac{3}{x+2} + \frac{x - 4}{x^2 - 2x + 3}$$

2. $\dfrac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}$

Solución Se tiene que la fracción se puede descomponer de la siguiente forma:

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

De donde se obtiene

$$A + B = 2, \quad C = -1, \quad 4A = 4 \quad \Rightarrow \quad A = 1, \quad B = 1 \ \text{y} \ C = -1$$

Por lo cual

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}$$

Caso 4 El denominador $q(x)$ contiene un factor irreductible repetido.

Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático repetido k veces de la forma $(ax^2 + bx + c)^k$, donde $b^2 - 4ac < 0$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene k términos de la forma:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

donde $A_1,\ A_2, \cdots, A_k$ y $B_1,\ B_2, \cdots B_k$ son constantes.

Ejemplo Descomponer en fracciones parciales

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}$$

Solución La forma de descomponer esta división de polinimios en fracciones parciales es

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2}$$

Multiplicando por $x(x^2+1)^2$, y luego igualando coeficientes; se obtiene el siguiente sistema

$$A + B = 0, \quad C = -1, \quad 2A + B + D = 2, \quad C + E = -1, \quad A = 1$$

Cuya solución es:

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = -1, \quad D = 1 \quad \text{y} \quad E = 0$$

Entonces

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}$$