Sistemas de Lotka Volterra

Depredador - Presa

u : Presa

v : Depredador

Supuestos

- Presa en ausencia del depredador crece de manera exponcial
- Los depredadores consumen de manera lineal a las presas
- No hay interferencia al momento de consumir
- En ausencia de la presa el depredador se extingue de manera exp

$$\frac{du}{dt} = \alpha u - \underbrace{vu\beta}$$

$\alpha > 0 \Rightarrow$ Crecimiento

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma v + \varepsilon(\beta v u)$$

$\delta = \varepsilon\beta$

$$= -\gamma v + \delta v u$$

(Natalidad - muerte)

Reescribir

$\boxed{a, b, c, d > 0}$

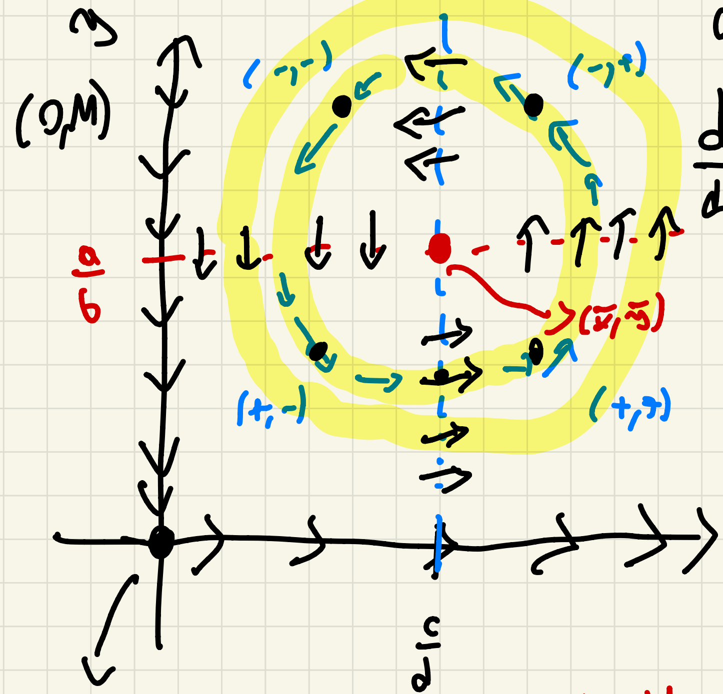
$$\frac{dx}{dt} = x(a - by)$$

(Especie 1)

$$\frac{dy}{dt} = y(-c + dx)$$

(Especie 2)

Diagrama de Fase



Equilibrio

$$\frac{dx}{dt}=0 \Rightarrow x=0 \quad y=\frac{a}{b}$$

$$\frac{dy}{dt}=0 \Rightarrow y=0 \quad x=\frac{c}{d}$$

Las rectas en que una derivada es 0 son las nulclinas

Equilibrio $(\bar{x},\bar{y})$ pues $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ se anulan

$y < \frac{a}{b}$

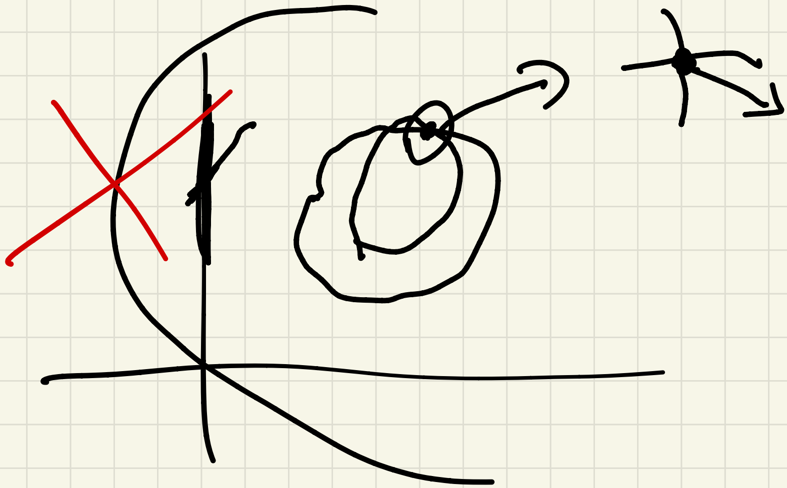
$by < a$

$0 < a - by$

$\rightarrow (x(t), y(t))$

¿Se pueden intersectar las trayectorias?

Por TEU no se pueden tocar



que tendría 2 soluciones

Si: $x(t_0) > 0$, $y(t_0) > 0$ ¿Puede $x(t) \leq 0$ o $y(t) \leq 0$ para $t > t_0$?

No, por TEU chocaría con uno de los ejes

$$\dot{x}_i = x_i \, f(\vec{x})$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(a - by) \\ \frac{dy}{dt} &= y(-c + dx) \end{aligned}\right\} \text{ Sistema}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-c+dx)}{x(a-by)} \qquad \left(\text{Ec. Variables Separables} \right)$$

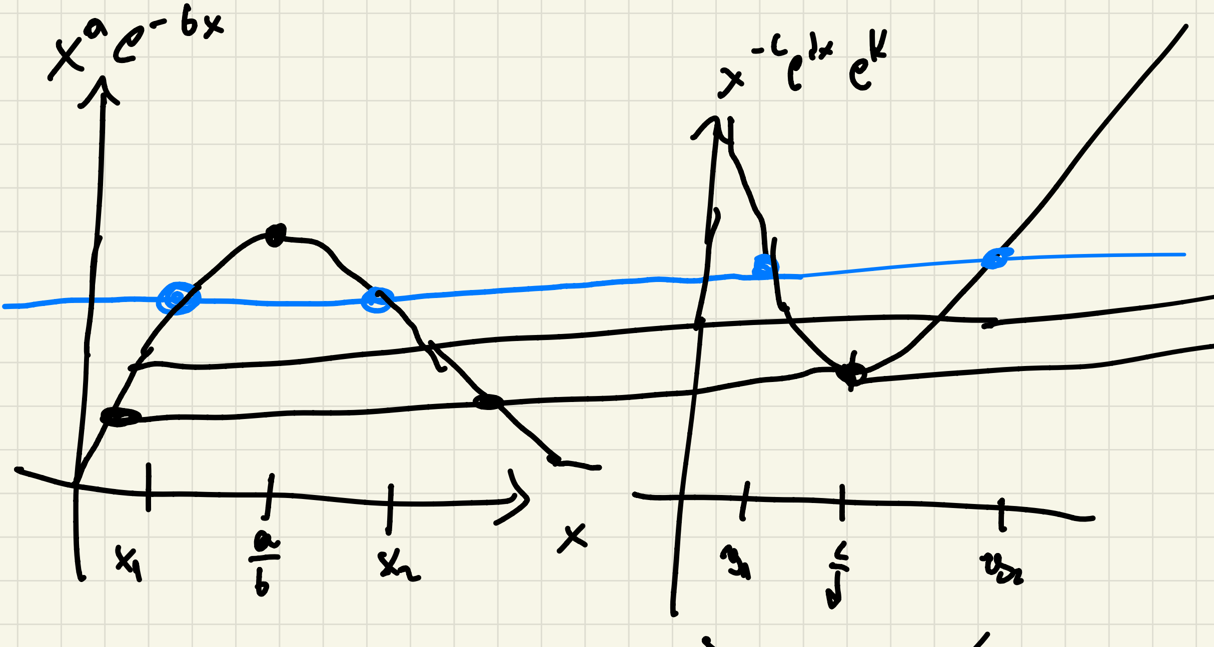
$$\Rightarrow \quad \frac{a-by}{y}\,dy = \frac{(-c+dx)}{x}\,dx$$

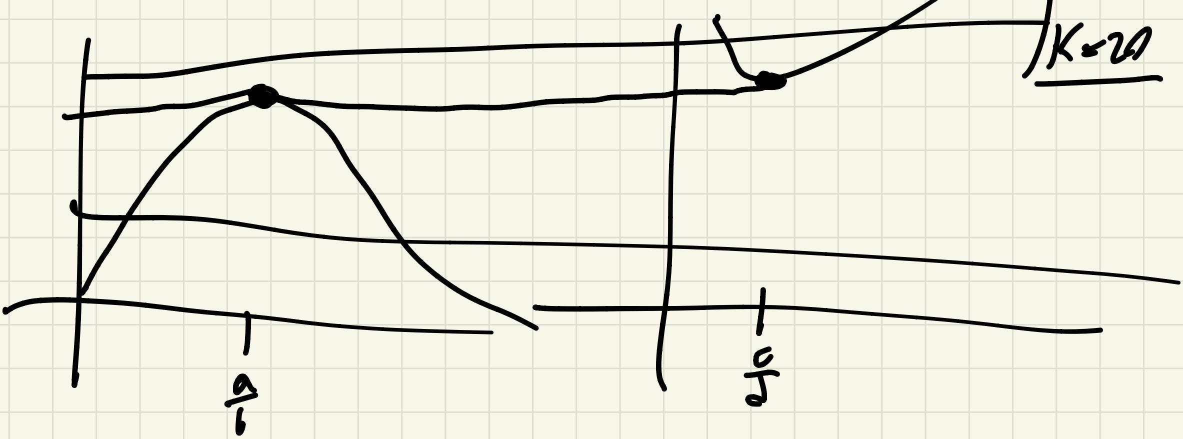
$$\int \frac{a-by}{y}\,dy = \int \frac{(-c+dx)}{x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int \left(\frac{a}{y} - b\right)dy = \int \left(-\frac{c}{x} + d\right)dx$$

$$\Leftrightarrow a\log(y) - by = -c\log(x) + dx + K$$

$$y^a \cdot e^{-by} = x^{-c} e^{dx} e^{K=4}$$





(x_1, y_1) o (x_1, y_2) $\in$ Trayectoria

para $K=4$

(x_2, y_1) o (x_2, y_2)

$K=20$

$\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$ es justamente sólo el equilibrio

$$V(x,y) = a\log y - by + c\log(x) - dx$$

Sabemos que en $(x(t), y(t))$ $V(x(t), y(t)) = C$

Modelo depredador-Presa con saturación

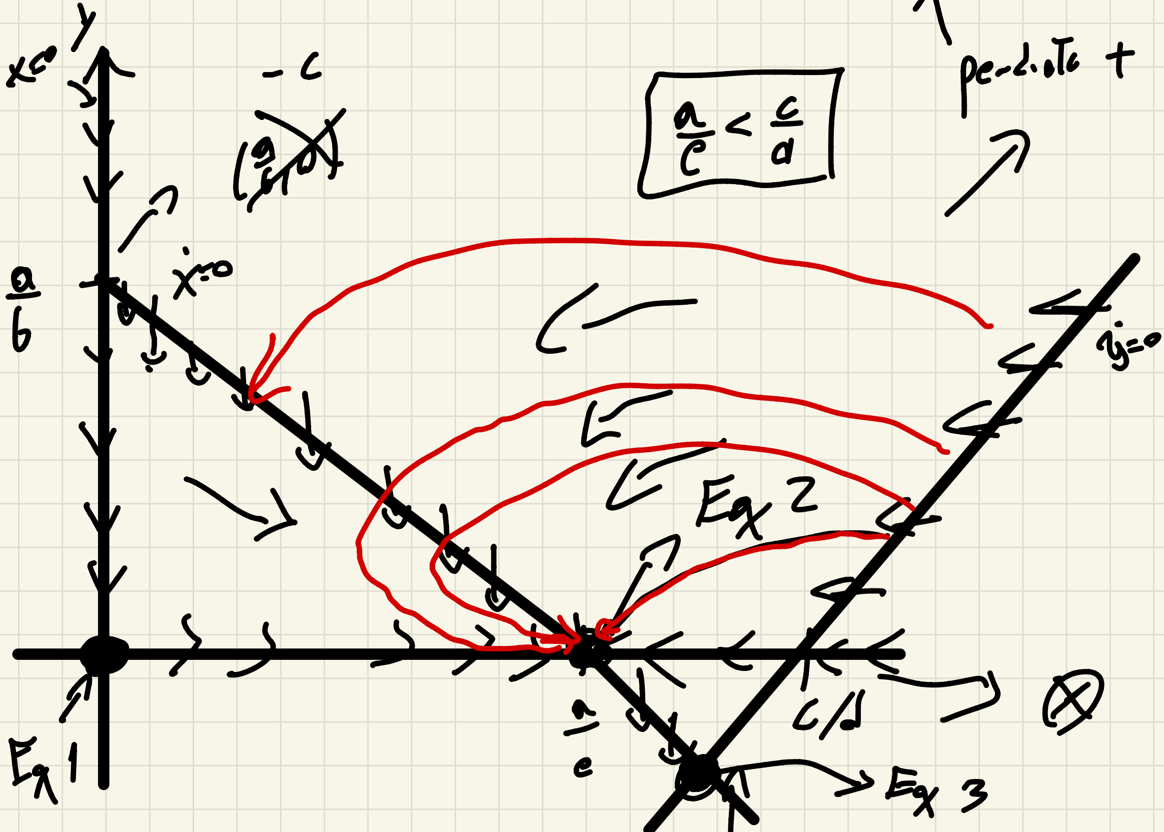
$$\dot{x} = x(a - ex - by)$$

$$\dot{y} = y(-c + dx - fy)$$

Producto −

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \vee a - ex - by = 0$$

$$\dot{y} = 0 \Rightarrow y = 0 \vee -c + dx - fy = 0$$



$-c + dx - fy$

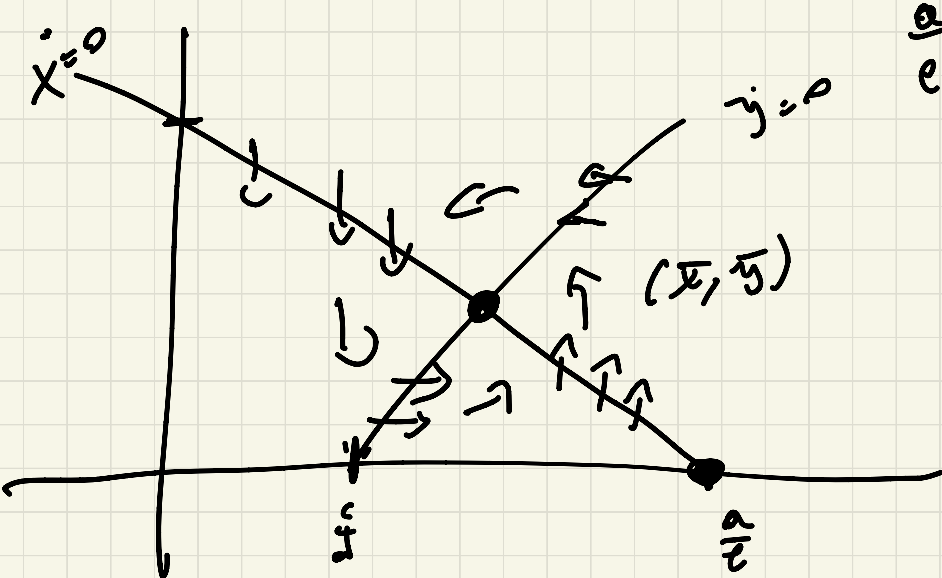
$\Rightarrow -c + d\frac{a}{e} > -c + dx - fy$ $\quad d\frac{a}{e}$

$$\boxed{\frac{a}{e} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{e}d < c \Rightarrow -c + \frac{ad}{e} < 0}$$

Por TEU siempre positivos

$\Rightarrow$ Eq 3 No me importa

$\frac{a}{e} > \frac{c}{d}$



$$V(x,y) = H(x) + G(y)\,\gamma$$

$$H(x) = \bar{x}\log(x) - x$$

$$G(y) = \bar{y}\log(y) - y$$

Si lo evaluo en $(x(t), y(t))$

$$\left(\frac{d}{dt}V(x,y) \geq 0\right) \quad o \quad \left(\frac{d}{dt}V(x,y) \leq 0\right)$$

El conjunto límite va estar bol.

por $\dot{V}(x,y) = 0$

$$\gamma = \frac{b}{d}$$

Verifique que $\frac{dV}{dt} \geq 0$ y solo $\dot{V}(x,y) = 0$

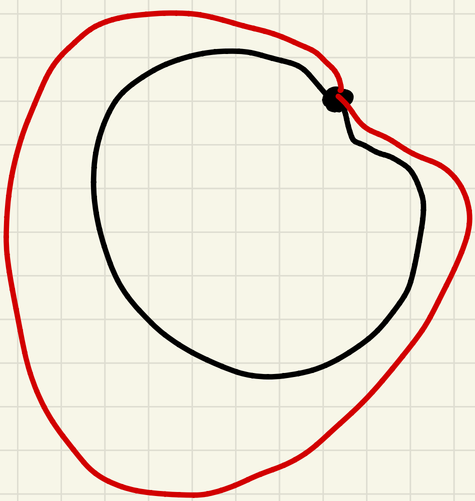
Pendiente Periodicidad

Las trayectorias son cerradas

Si: $(x(t_0), y(t_0)) = (x(t_0+T), y(t_0+T_0))$

$$\Rightarrow (x(t), y(t)) = (x(t+T), y(t+T))$$

$\boxed{\text{Por TEU}}$



$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}$ (No)

$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$

$\frac{d\vec{x}}{dt} = F$ (Depende de t)

$\vec{x}(t_0+T) = \vec{x}_0$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T a - by \, dt$$

$$\frac{1}{T}\left(\cancel{\log(x(T))} - \cancel{\log(x(0))}\right) = \frac{1}{T} aT - \frac{b}{T}\int_0^T y\, dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{T}\int_0^T y\, dt = \frac{a}{b}}$$

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T x\, dt = \frac{c}{d}}$$

Para el caso (2) $\boxed{\frac{a}{c} > \frac{c}{d}}$

$$V(x,y) = \bar{x}\log(x) - x + y\left(\bar{y}\log(y) - y\right)$$

$$\frac{dV}{dt} = \bar{x}\frac{\dot{x}}{x} - \dot{x} + \gamma\left(\bar{y}\frac{\dot{y}}{y} - \dot{y}\right)$$

$$= \frac{\dot{x}}{x}(\bar{x} - x) + \gamma(\bar{y} - y)\frac{\dot{y}}{y}$$

$$= (a - ex - by)(\bar{x} - x) + \gamma(-c + dx - fy)(\bar{y} - y)$$

$$a - e\bar{x} - b\bar{y} = 0$$

$$a = e\bar{x} + b\bar{y}$$

$$-c + d\bar{x} - f\bar{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad -c = -d\bar{x} + f\bar{y}$$

$$= \left(e(\bar{x} - x) + b(\bar{y} - y)\right)(\bar{x} - x) + \gamma\left(-d(\bar{x} - x) + f(\bar{y} - y)\right)(\bar{y} - y)$$

$$= e(\bar{x} - x)^2 + \left(\underline{b - \gamma d}\right)(\bar{y} - y)(\bar{x} - x) + \gamma(\bar{y} - y)^2 f$$

$$\boxed{\gamma = \frac{b}{d}}$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = e(\bar{x}-x)^2 + \frac{b}{d}f(\bar{y}-y)^2 \geq 0$$

$$y \quad \dot{V}(x,y) = 0 \iff \begin{array}{l} x = \bar{x} \\ y = \bar{y} \end{array}$$

$$\frac{d}{dt}V(x,y) = \left(\frac{a}{e} - x\right)^2 e + fy\left(\underbrace{c - \frac{da}{e} + fy}\right)$$

$$\boxed{y = \frac{b}{d}}$$

Como $c > \frac{da}{e}$

$$\frac{a}{e} < \frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}V \geq 0$$

es 0 si y solo si $x = \frac{a}{e}$

e $y = 0$