Motivación : Conejos de Fibonacci

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

$$y_n = x_{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = y_n$$

$$x_{n+2} = y_{n+1} = y_n + x_n$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_n \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Maternidad

$$\begin{bmatrix} s_1 m_1 & s_2 m_2 & \cdots & s_n m_n \\ s_2 & & & \\ & s_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n \end{bmatrix}$$

Supervivencia

S_i: supervivencia de la especie i

m_i: maternidad de i

$$Z_{N+1} = \underbrace{L}_{\text{Matriz}} Z_N = L^N Z_0$$

Siempre que la matriz L sea diagonalizable.

Sea $L \in M_{m\times m}$

$\exists \underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_m}_{\text{Valores propios}}$ y $\underbrace{v_1, \ldots, v_m}_{\text{Vectores propios}}$

$$\boxed{\lambda_i v_i = L v_i}$$

$\{v_1, \dots, v_m\}$ genera $\mathbb{R}^m$

$\boxed{\Rightarrow}$

$z_0 \in \mathbb{R}^m \qquad z_0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$

$$z_1 = L z_0 = L \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i L v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i v_i$$

$$\boxed{z_N = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i^N v_i}$$

Si $\forall_i \, |\lambda_i| < 1$

$\Rightarrow \quad |Z_n| \longrightarrow 0$

$$Z_{n+1} = \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_n \\ x_n \end{pmatrix}$$

$A_1 \in \mathbb{R}^2$
$B_1 \in \mathbb{R}^2$

$$Z_{n+1} = A_1 \lambda_1^{n+1} + B_1 \lambda_2^{n+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{n+1} = \alpha_1 \lambda_1^{n+1} + \beta_1 \lambda_2^{n+1}}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \lambda(\lambda-1) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x_N = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^N \cdot \alpha_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^N \cdot \beta_1$$

$$\alpha_1 \neq 0 \text{ y } \beta_1 \neq 0$$

$$x_N \xrightarrow[N \to \infty]{} \infty \cdot \text{signo}(\alpha_1), \text{ pues } \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^N \to \infty$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^N \to 0$$

Matriz irreducible

$$\begin{array}{cc} & \text{Columna } j \\ & \downarrow \\ \text{Fila } i \to & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{ij} \\ & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

Arco i a j es un camino

A través de coeficientes $a_{i\,i_1}$, $a_{i_1\,i_2}$,

..... $a_{i_k\,j}$, es decir comienza

en i y termina en j

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de 1 a 1 hay

de 2 a 3 (No hay directo)

$a_{23}=0$

$a_{21} \cdot a_{13} \Rightarrow$ de 2 a 3

Cualquier estado i llega a cualquier j

Leslie

$$
\begin{bmatrix}
s_1 m_1 & \cdots & \cdots & \cdots & s_1 m_w \\
s_2 & 0 & & & \\
\vdots & s_3 & \ddots & & \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \\
0 & \cdots & \cdots & s_w & 0
\end{bmatrix}
$$

Va a ser irreductible siempre que las últimas especies afecten la natalidad

(Es muy raro que algún $s_i = 0$) por lo que suele bastar $m_w \neq 0$

Cuando Tenemos coef positivos y matriz irreducible Tendremos un valor propio principal positivo

$\exists \tilde{i} \in m \quad \lambda_{\tilde{i}} \geq |\lambda_i| \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$

$\Rightarrow$

$\lambda_1 < 1 \longrightarrow$ Se va 0

$\lambda_1 > 1 \longrightarrow$ diverge

$\lambda_1 = 1 \longrightarrow$ puede converger

$\boxed{1.19}$ a) γ : Producción de semillas

β : Germinación Año 2

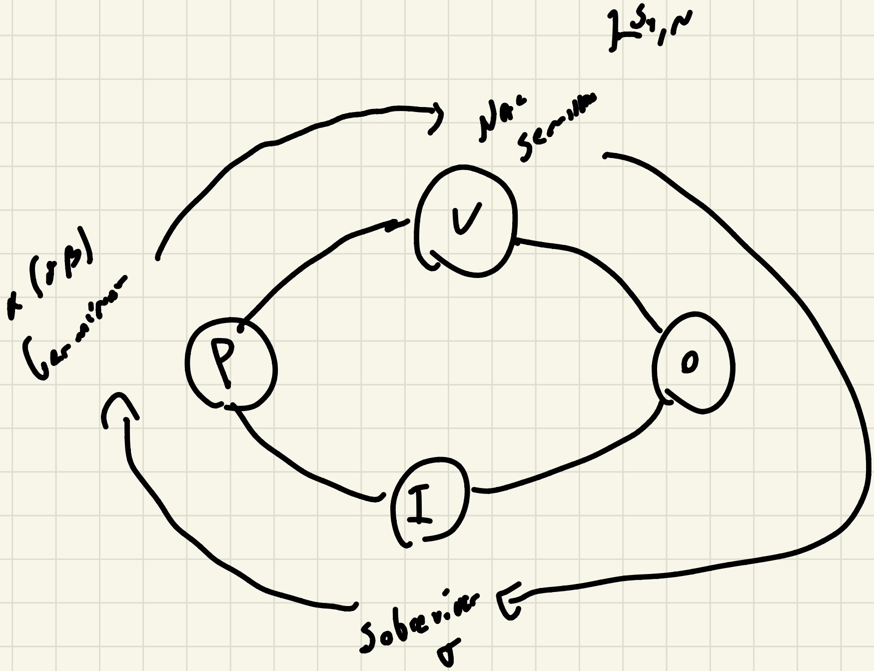
α : Germinación Año 1

σ : Supervivencia invierno

$$\boxed{z_{n+2} = \sigma \alpha \gamma z_{n+1} + \beta (1-\alpha) \sigma^2 \gamma z_n}$$

b)

$$\begin{pmatrix} S_{1,N+1} \\ P_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma\sigma(1-\alpha) \\ \sigma\beta & \gamma\sigma\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_{1,N} \\ P_N \end{pmatrix}$$



$$\gamma P_N \sigma \xrightarrow{\alpha} P_{N+1}$$

$$\gamma P_N \sigma \xrightarrow{(1-\alpha)} S_{1,N+1}$$

$$S_{1,N} \sigma \xrightarrow{\beta} P_{N+1}$$

$$S_{1,N} \sigma \xrightarrow{1-B} \text{Morta}$$

$$\begin{pmatrix} P_{N+1} \\ S_{1,N+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\sigma\alpha & \sigma\beta \\ \gamma\sigma(1-\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P_N \\ S_{1,N-1} \end{pmatrix}$$

c) $\gamma > \dfrac{1}{\alpha\sigma + \beta(1-\alpha)\sigma^2} \Rightarrow$ Supervivencia

Hay probar que es equivalente a $\lambda_1 > 1$

$$p(\lambda) = (\lambda - \gamma\sigma\alpha)\lambda - \sigma^2\beta\gamma(1-\alpha)$$

No nos gusta

Nuestro caso

$$p(1) < 0 \iff \lambda_1 > 1$$

$$(1-\gamma\sigma\alpha) - \sigma^2\beta\gamma(1-\alpha) < 0$$

$$\iff \boxed{\frac{1}{\sigma\alpha + \sigma^2\beta(1-\alpha)} < \gamma}$$

d) $\boxed{R_0 > 1}$

Algoritmo

$$\begin{pmatrix} u_{0,N+1} \\ u_{1,N+1} \\ \vdots \\ u_{w-1,N+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 m_1 & \cdots & \cdots & S_1 m_w \\ S_2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & S_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & S_w & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{0,N} \\ u_{1,N} \\ \vdots \\ u_{w-1,N} \end{bmatrix}$$

$\boxed{N=0}$ Son condiciones iniciales

$\boxed{i=0}$ $$u_{0,N} = b_N = S_1 \sum_{i=1}^{w} u_{i-1,N-1} \, m_i \qquad (*)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} i \geq 1 \\ N \geq 1 \end{array}}$$

$$u_{i,N} = \begin{cases} U_{i-N,0}\, s_i s_{i-1} \cdots s_{i-N+1} = U_{i-N,0} \dfrac{l_i}{l_{i-N}} & \boxed{i > N} \\[2ex] u_{0,N-i}\, s_i s_{i-1} \cdots s_2 = b_{N-i} \dfrac{l_i}{s_1} & \boxed{i \leq N} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Case } w = \infty}$$

$$\text{(*)} \quad b_N = u_{0,N} = s_1 \sum_{i=1}^{\infty} u_{i-1,N-1} \cdot m_i$$

$$= s_1 \sum_{i=1}^{N} u_{i-1,N-1} \cdot m_i + s_1 \sum_{i=N+1}^{\infty} u_{i-1,N-1}\, m_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} u_{0,N-i} \underbrace{l_i\, m_i}_{f_i} + s_1 \sum_{i=N+1}^{\infty} \text{Algo}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} b_{N-i}\, f_i + \sum_{i=N+1}^{\infty} \text{Algo}$$

Si la capacidad es solo w

$N \to \infty$

$$\boxed{b_N = \sum_{i=1}^{w} b_{N-i} f_i}$$

Importante

$U_{0,N} = b_N \approx A_1 \lambda_1^N \longrightarrow$ Principal

$$\boxed{b_N = A_1 \lambda_1^N + A_2 \lambda_2^N + \ldots + A_w \lambda_w^N}$$

$$\lambda_1^N = \sum_{i=1}^{w} \lambda_1^{N-i} f_i$$

$$\Rightarrow \boxed{1 = \sum_{i=1}^{w} f_i \, \lambda_1^{-i}}$$

λ_1 Tiene que cumplirlo

$f_i = m_i \, l_i$

$l_i = s_i s_{i-1} \ldots s_1$

$$1 = \sum_{i=1}^{w} f_i \, e^{-r_1 i} \qquad \boxed{e^{r_1} = \lambda_1}$$

$$\boxed{F(r) = \sum_{i=1}^{w} f_i \, e^{-r i} - 1}$$

Vamos a buscar 0 de $F(r)$

Por ejemplo Newton

$$\boxed{R_0 = F(0) = \sum_{i=1}^{w} f_i}$$