MA3701-2 Optimización
Profesor: Jorge Amaya
Auxiliar: Pablo Araya.
Sebastian Lópéz
Fecha: 26 de Noviembre de 2021

Auxiliar 11: KKT + Alg. del gradiente

Resumen

Sean:

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable.
- $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $i = 1, ..., l$ diferenciables.
- $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $j = 1, ..., m$ diferenciables.

Consideremos el siguiente problema de minimización no lineal:

$$\begin{aligned} (P) \ \ \text{mín} \ & f(x) \\ s.a. \ h_i(x) \ & = \ 0, \ i = 1, ..., l \\ g_j(x) \ & \leq \ 0 \ , \ j = 1, ..., m \end{aligned}$$

Teo 1. *Sea $\bar{x}$ un punto factible para (P). Supongamos que el conjunto $\{\nabla h_i(\bar{x}), \nabla g_j(\bar{x}) | i = 1, ..., l, j \in I\}$ es el linealmente independiente. Entonces, si $\bar{x}$ es solución de (P), existen $\lambda_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, ..., l$ y $\mu_j \in \mathbb{R}$ para $j = 1, ..., m$ tales que:*

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0$$

$$\mu_j g_j(\bar{x}) = 0, \ \forall j = 1, ..., m$$

$$\mu_j \geq 0, \ \forall j = 1, ..., m$$

En este caso en este caso a los λ y μ se les conocen como multiplicadores de KKT.

Problemas

P1. Resuelva el siguiente problema usando las condiciones de KKT:

$$\begin{aligned} \text{mín} \ \ & e^{-x_1} + e^{-2x_2} \\ s.a. \ \ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

P2. Considere la función:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + \alpha y^2)$$

con $\alpha > 0$.

a) Muestre que las iteraciones del metodo del gradiente siguen la siguiente formula:

$$x_{k+1} = \frac{x_k y_k^2}{x_k^2 + \alpha^3 y_k^2}\alpha^2(\alpha - 1) \quad ; \quad y_{k+1} = \frac{y_k x_k^2}{x_k^2 + \alpha^3 y_k^2}(1 - \alpha)$$

b) Partiendo del punto $(\alpha, 1)$ demuestre que las iteraciones del método del gradiente son:

$$x_k = \alpha\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\right)^k \quad ; \quad y_k = \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}\right)^k$$

c) Encuentre el valor de la función objetivo en cada iteración. ¿Para que valores de α se puede asegurar que el valor de la función objetivo disminuye?

P3. Dado $u = (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$, nos proponemos encontrar un $x \in \mathbb{R}^n$ que verifique:

$$x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$$

y se encuentre lo mas cerca posible de u. Formalice el problema como uno de minimización convexa y explique por que este problema tiene solución. Pruebe que el óptimo $\bar{x}$ satisface:

$$\sum_{i=1}^{j}(u_i - \bar{x}_i) \geq 0 \ \forall j = 1, ..., n-1$$

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{x}_i) = 0$$

$$\left[\sum_{i=1}^{j}(u_i - \bar{x}_i)\right](\bar{x}_j - \bar{x}_{j+1}) = 0 \ \forall j = 1, ..., n-1$$

$$(u_n - \bar{x}_n)(\bar{x}_{n-1} - \bar{x}_n) = 0$$