MA3403-4. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 3 de diciembre de 2021

Auxiliar 13

P1. Suponga que Y_1, Y_2 Y_3 son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, de distribución exponencial, con función de densidad

$$f(y) = \left(\frac{1}{\theta}\right) e^{-y/\theta} \qquad \text{si } y > 0$$

Considere los siguientes 4 estimadores del parámetro θ

$$\hat{\theta}_1 = Y_1, \quad \hat{\theta}_2 = \frac{Y_1 + 2Y_2}{3}, \quad \hat{\theta}_3 = \text{mín}(Y_1, Y_2, Y_3), \quad \hat{\theta}_4 = \bar{Y}$$

a) ¿Cuáles de los estimadores anteriores es insesgado? Como podría modificar los estimadores para que todos sean insesgados?
b) De los estimadores insesgados, ¿Cuál tiene menor varianza y explique porque tiene menor ECM?

P2. Suponga que $Y_1, ..., Y_n$ denota una muestra aleatoria simple de la distribución de Poisson con media λ.

a) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\lambda}$ para λ.

b) Encuentre el valor esperado y la varianza de $\hat{\lambda}$.

c) Muestre que $\hat{\lambda}$ converge c.s. a λ cuando $n \to \infty$

P3. La intensidad o brillo aparente de una estrella, medida por un instrumento adecuado, se modela como una variable aleatoria normal con ambos parámetros desconocidos. Al tomar una muestra de 25 datos usted obtiene un promedio de $204,5$ y una desviación estándar muestral de $7,2$.

a) Encuentre un intervalo de confianza para la media al nivel de 90 %.

b) Usted se da cuenta que las especificaciones técnicas del instrumento de medición indican que la varianza real de las mediciones es de $49,0$. Encuentre un nuevo intervalo de confianza para la media al nivel de 90 %.

c) Usted no está satisfecho con el resultado anterior, y desea obtener un nuevo intervalo cuyo largo sea de a lo más 2,3, manteniendo el nivel de confianza. ¿Cuántas mediciones adicionales necesita?

d) Usted se da cuenta que no dispone de tiempo para tomar esas mediciones adicionales, y decide trabajar con los 25 datos iniciales. ¿Que nivel de confianza entrega un intervalo con el largo deseado de $2,3$.

Propuestos

Prop1 La lectura en un voltímetro conectado a un circuito de prueba está distribuida uniformemente en el intervalo $(\theta, \theta+1)$, donde θ es el valor desconocido del voltaje real del circuito. Suponga que $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ denota una muestra aleatoria simple de esas lecturas.

a) Demuestre que $\hat{\theta} = \overline{Y}$ es un estimador sesgado de θ y calcule su sesgo.

b) Encuentre el error cuadrático medio de $\overline{Y}$ cuando se usa como estimador de θ.

c) Entregue un estimador insesgado de θ.

Prop2 Sea Y_1, ..., Y_n una m.a.s. de una densidad dada por:

$$f(y) = 3\beta^3 y^{-4} 1_{y \geq \beta}$$

donde $\beta > 0$ es desconocido. Considere el estimador $\hat{\beta} = \text{mín}(Y_1, ..., Y_n)$.

a) Encuentre el sesgo del estimador $\hat{\beta}$.

b) Encuentre su error cuadrático medio.

Teorema 1 (Teorema Central del Límite)**.** *Si* $X_1, X_2, ...$ *es una sucesión de variables aleatorias iid con media* μ *y varianza* $\sigma^2 \neq 0$*, y* $S_n = (X_1 + ... + X_n)/n$*, entonces*

$$Z_n = \frac{(S_n - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}}$$

converge en distribución a una normal estándar. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq z) = \Phi(z)$$

donde Φ *es la función de distribución de una* $\mathcal{N}(0,1)$*.*

Definición 1. Una Muestra Aleatoria Simple es una colección de v.a.'s $X_1, X_2, ..., X_n$ i.i.d referentes a una variable aleatoria X.

Definición 2. Un Estadístico es una función de la muestra: $e = e(X_1, X_2, ..., X_n)$

Definición 3. Un estimador $\hat{\theta}$ para el parámetro θ es un estadístico que se utiliza para aproximar θ. Diremos que un estimador es **Insesgado**: Si $E(\hat{\theta}) = \theta$ y será sesgado si $E(\hat{\theta}) \neq \theta$. Notar que $\hat{\theta}$ es una v.a mientras que θ es un valor.

Definición 4. Se define el **Error Cuadrático Medio** con respecto al estimador $\hat{\theta}$ como sigue:

$$ECM(\hat{\theta}) = E((\hat{\theta} - \theta)^2) = Var(\hat{\theta}) + sesgo(\hat{\theta})^2$$

Donde $sesgo(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$.

Definición 5. Sea $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes con función de densidad de probabilidad $f(x_i;\theta)$ entonces, el **EMV** (El estimador de máxima verosimilitud) es el valor θ que maximiza $L(\theta)$, con:

$$L(\theta) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)\right)$$