MA3403-4. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 26 de noviembre de 2021

Auxiliar 12: Teoremas Límites y Desigualdades

Proposición 1 (Desigualdad de Markov). *Si X es una v.a. positiva y $a > 0$, entonces*

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Proposición 2 (Desigualdad de Chebyshev). *Para todo $a > 0$ se cumple que*

$$\boxed{\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}}$$

Teorema 1 (LGN débil). *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de v.a.'s independientes e idénticamente distribuidas (iid). Sea $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ (como la sucesión es iid, todas las v.a.'s X_i tienen la misma esperanza). Sea*

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n X_i$$

Entonces para todo $\epsilon > 0$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - \mu| \geq \epsilon\right) = 0$$

Teorema 2 (LGN fuerte). *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de v.a.'s independientes e idénticamente distribuidas (iid). Sea $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ (como la sucesión es iid, todas las v.a.'s X_i tienen la misma esperanza). Sea*

$$\boxed{\overline{X}_n = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n X_i}$$

Entonces,

$$\mathbb{P}(\underline{lim_{n\to\infty}\overline{X}_n} = \mu) = 1$$

Teorema 3 (Teorema Central del Límite). *Si $X_1, X_2, \ldots$ es una sucesión de variables aleatorias iid con media μ y varianza $\sigma^2 \neq 0$, y $\overline{X}_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$, entonces*

$$\boxed{Z_n = \frac{(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}}}$$

converge en distribución a una normal estándar. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq z) = \Phi(z)$$

donde Φ es la función de distribución de una $\mathcal{N}(0,1)$.

P1. Se sabe que el valor esperado del puntaje que obtiene un alumno en el examen final de un ramo es de 75.

a) De una cota superior de la probabilidad que el puntaje sea mayor que 85.

b) Suponga de aquí en adelante que se sabe que la varianza es 25. ¿Qué puede decirse sobre la probabilidad de que el puntaje obtenido por el alumno esté entre 65 y 85?

c) ¿Cuántos alumnos tienen que dar el examen para asegurar que, con probabilidad de al menos un 99 %, el promedio de notas esté entre 70 y 80?

P2. Suponga que usted dispone de una mesa cuadrada de lado a, sobre la cual dibuja un círculo inscrito en ella. Luego, usted lanza n objetos al azar sobre la mesa (distribuidos uniformemente y de manera independiente) y denota c_n la cantidad de ellos que caen dentro del círculo. Muestre que la cantidad $\frac{4c_n}{n}$ converge a π cuando $n \to \infty$ con probabilidad 1.

P3. Un restaurante puede servir 80 comidas por noche, y sólo acepta clientes con reservación. La experiencia Muestra que 20 % de los clientes que reservan no vienen.

Asumiendo que los clientes reservan y comen de manera independiente ¿Cuál es la máxima cantidad de reservaciones que puede aceptar el restaurante para que la probabilidad de poder servir a todos los clientes que vendrán sea mayor o igual a 0,9772?

Hint: Si Z distribuye como una normal estándar, entonces $\mathbb{P}(Z > 2) = 0{,}0228$

P4. Los tiempos para procesar pedidos en el mostrador de servicio de una farmacia están distribuidos exponencialmente con media de 10 minutos. Si 100 clientes pasan al mostrador. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos la mitad de ellos necesite esperar más de 10 minutos?

P1. Se sabe que el valor esperado del puntaje que obtiene un alumno en el examen final de un ramo es de 75.

a) De una cota superior de la probabilidad que el puntaje sea mayor que 85.

b) Suponga de aquí en adelante que se sabe que la varianza es 25. ¿Qué puede decirse sobre la probabilidad de que el puntaje obtenido por el alumno esté entre 65 y 85?

c) ¿Cuántos alumnos tienen que dar el examen para asegurar que, con probabilidad de al menos un 99 %, el promedio de notas esté entre 70 y 80?

X: Puntaje del Alumno

$E(X) = 75$

$$\boxed{P(X > 85) < M}$$

No sabemos $\rightarrow$ $Var(X)$ ~~$\Rightarrow$~~ Cheby

No podemos calcular

$$P(X > 85) \overset{\text{Markov}}{\leq} \frac{75}{85} \rightarrow E(X)$$

$$\boxed{P(X > 85) \leq \frac{5}{7}} \Rightarrow \cancel{P(X < 85) > \frac{2}{7}}$$

b) $Var(x) = 25$

$$P(65 \le X \le 85) =$$

$$P(\overset{65-75}{-10} \le \overset{x-75}{X - E(x)} \le \overset{85-75}{10}) =$$

$$P(|X - E(x)| \le 10) =$$

$$1 - P(|x - E(x)| > 10)$$

I

$$P(|X - E(x)| > \underset{a}{10}) \le \frac{25 \rightarrow Var(x)}{100 \rightarrow a^2}$$

$$P(|X - E(x)| > 10) \le \frac{1}{4}$$

$$-P(|X - E(x)| > 10) \ge -\frac{1}{4}$$

$$P(65 \le X \le 85) \overset{1}{=} 1 - P(|X - E(X)| > 10)$$

$$\overset{2}{\geq} 1 - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(X \in [65, 85]) \geq \frac{3}{4}}$$

N : Cantidad de alumnos

X_i : Puntaje del alumno i

$$(X_1, \ldots\ldots, X_N)$$

$$E(X_i) = 75$$

$$Var(X_i) = 25$$

$$\overline{X}_N = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} \quad ; \text{Promedio}$$

$$E(\overline{X}_N) = \frac{E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} E(X_i)}{N} = \frac{\cancel{N}}{\cancel{N}} 75.$$

(Se usa que X_i son ind)

$$\mathrm{Var}(\overline{X}_N) = \frac{\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)}{N^2} = \frac{\cancel{N}}{N^2} \cdot 25$$

$$= \frac{25}{N}$$

$$P(70 \leq \bar{X}_N \leq 80) \geq 0.99$$

Queremos esc N

$$P(\bar{X}_N \in [70, 80]) = P(-5 \leq \bar{X}_N - E(\bar{X}_N) \leq 5)$$

$$= P(|\bar{X}_N - E(\bar{X}_N)| < 5)$$

$$= 1 - P(|\bar{X}_N - E(\bar{X}_N)| \geq 5)$$

$$P(|\bar{X}_N - E(\bar{X}_N)| \geq 5) \overset{\text{Chebyshev}}{<} \frac{25}{N \cdot 25} = \frac{1}{N}$$

$$P(\bar{X}_n \in [70,80]) > 1 - \frac{1}{n} \geq 0.99$$

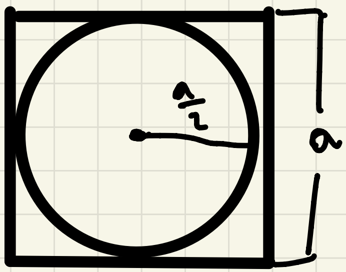
impongo

Si encuentro n° tq que $1 - \frac{1}{n^\circ} \geq 0.99$

$$\Rightarrow \quad P(\bar{X}_n \in [70,80]) \geq 0.99$$

basta con tomar $n^\circ \geq 100$

P2. Suponga que usted dispone de una mesa cuadrada de lado a, sobre la cual dibuja un círculo inscrito en ella. Luego, usted lanza n objetos al azar sobre la mesa (distribuidos uniformemente y de manera independiente) y denota c_n la cantidad de ellos que caen dentro del círculo. Muestre que la cantidad $\frac{4c_n}{n}$ converge a π cuando $n \to \infty$ con probabilidad 1.



C_N = Cantidad de objetos que caen en el circulo

$$X_i \begin{cases} 1 & \text{Si cae en} \\ 0 & \text{Si no cae} \end{cases}$$

Tenemos $X_1, \ldots, X_N$

$$C_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

$$\frac{C_N}{N} = \overline{X}_N$$

$$\frac{4C_N}{N} \to \pi \iff \frac{C_N}{N} \to \frac{\pi}{4}$$

$$\iff \overline{X_N} \to \frac{\pi}{4}$$

$$P(X_i = 1) = \frac{CT}{CF} = \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{a^2} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

$$P(X_i = 0) = 1 - \frac{\pi}{4}$$

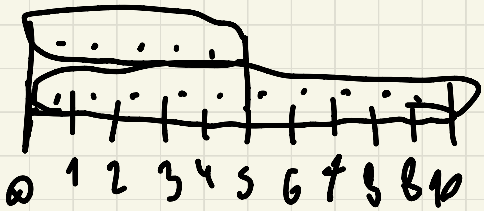
$$E(X_i) = 1 \cdot P(X_i = 1) + 0 \cdot P(X_i = 0)$$

$$\Rightarrow E(X_i) = \frac{\pi}{4}$$

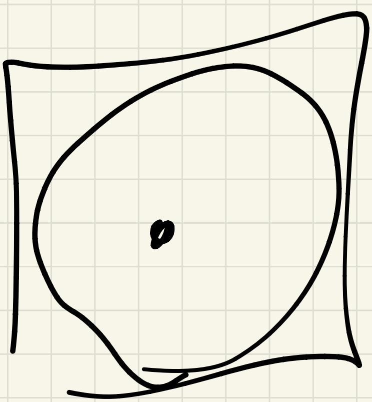
Por ley Grande Número Fuerte

$$P\left(\lim \overline{X_N} \to \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\iff P\left(\lim \frac{4C_N}{N} \to \pi\right) = 1$$



$$P(X \in [2,8]) = \frac{8-2}{10} = \frac{6}{10}$$



$$P(X \in \bigcirc) = \frac{\text{Area } \bigcirc}{\text{Area } \square}$$

P3. Un restaurante puede servir 80 comidas por noche, y sólo acepta clientes con reservación. La experiencia Muestra que 20 % de los clientes que reservan no vienen.

Asumiendo que los clientes reservan y comen de manera independiente ¿Cuál es la máxima cantidad de reservaciones que puede aceptar el restaurante para que la probabilidad de poder servir a todos los clientes que vendrán sea mayor o igual a 0,9772?

Hint: Si Z distribuye como una normal estándar, entonces $\mathbb{P}(Z > 2) = 0{,}0228$ $\Leftrightarrow P(Z \leq 2) = 0.9772$

$P(Z \leq 2.1) \geq 0.9772$

P(Venga si ya reservo) es $\frac{4}{5}$

Tengo N reservas

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si viene a comer} \\ 0 & \text{si no viene a comer} \end{cases}$$

$$P(X_i = 1) = \frac{4}{5}$$

$$P(X_i = 0) = \frac{1}{5}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \leq 80\right) \geq 0.9772$$

$$E(X_i) = \frac{4}{5} = \mu$$

$$\text{Var}(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2$$

$$= 1^2 \cdot P(X_i = 1) - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= \frac{4}{5}\left(1 - \frac{4}{5}\right) = \boxed{\frac{4}{25}}$$

$$\sigma = \frac{2}{5}$$

$$P\left(\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i - \frac{4}{5}}{2/5\sqrt{N}} \leq \frac{\frac{80}{N} - \frac{4}{5}}{\frac{2}{5\sqrt{N}}} \right) \geq 0.9772$$

Tamaño N grande

$$P\left(Z \leq \frac{\frac{400 - 4N}{5N}}{\frac{2}{5\sqrt{N}}} \right) \geq 0.9772$$

$$P\left(z \leq \frac{200-2N}{\sqrt{N}}\right) \geq 0.9772$$

$$\iff \frac{200-2N}{\sqrt{N}} > 2$$

$$\iff 100 - N > \sqrt{N}$$

El maximo N es $\boxed{N^* = 90}$

P4. Los tiempos para procesar pedidos en el mostrador de servicio de una farmacia están distribuidos exponencialmente con media de 10 minutos. Si 100 clientes pasan al mostrador. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos la mitad de ellos necesite esperar más de 10 minutos?