

MA3403-4. Probabilidades y Estadística**Profesor:** Raúl Gouet**Auxiliares:** Vicente Salinas**Fecha:** 19 de noviembre de 2021**Auxiliar 11: Más Vectores aleatorios**

P1. Se obtienen dos mediciones independientes de una cantidad μ . Estas mediciones se modelan como dos v.a. X e Y normales con la misma esperanza: $E[X] = E[Y] = \mu$, pero distinta varianza: $Var(X) = \sigma_X^2$, $Var(Y) = \sigma_Y^2$. Si se combinan ambas mediciones para obtener un promedio ponderado de la medición a través de la nueva v.a. $Z = \alpha X + (1 - \alpha)Y$, con $\alpha \in [0, 1]$:

a) Muestre que $E[Z] = \mu$.

b) Calcule $Var(Z)$. Encuentre el valor de α que minimiza la varianza del promedio ponderado, en función de σ_X^2 y σ_Y^2 .

P2. Sea (X, Y) un vector aleatoria con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = 12xy \mathbf{1}_{\{y < x < \sqrt{y}\}}$$

a) Plantee las integrales para calcular $P(X > 1/2 | Y < 1/2)$

b) Sea $y > 0$, calcule $E(X|Y = y)$ ¿Son X e Y independientes?

P3. Para ir de la Facultad a su casa, usted tiene dos opciones: puede esperar el bus de la línea A en el paradero correspondiente, o bien el bus de la línea B en otro paradero. Los tiempos T_A y T_B (en minutos) que tarda en pasar el siguiente bus de la línea respectiva son variables aleatorias exponenciales independientes de parámetros λ_A y λ_B , respectivamente. Suponga que usted escoge el paradero al azar, independiente de T_A y T_B . Sea T su tiempo de espera para abordar al bus.

1. Encuentre $P(T_A < T_B)$.

2. Si a los t minutos usted sigue en el paradero, ¿cuál es la probabilidad de que esté esperando el bus de la línea A ? Suponiendo $\lambda_B > \lambda_A$, ¿qué ocurre cuando t es grande?

3. Usted cambia su estrategia: se ubica a medio camino entre los paraderos, y apenas visualiza el primer bus que viene llegando, usted corre al paradero correspondiente y aborda el bus. ¿Cuál es la distribución de T con esta estrategia.

Propuestos

Prop1 Sea (X_i, Y_i) , con $i = 1, \dots, n$, con $n \in \mathbb{N}$, una secuencia de vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos. Esto es que, “conjuntamente”, (X_1, Y_1) es independientes, y tienen la misma distribución, que (X_2, Y_2) y así sucesivamente. De este modo, para un i y j arbitrarios, tales que $i \neq j$, se tiene que X_i y Y_i pueden ser dependientes mientras que X_i y Y_j son independientes. Además se tiene que para todo i : $\mu_x = E(X_i)$, $\mu_y = E(Y_i)$, $\sigma_x^2 = Var(X_i)$, $\sigma_y^2 = Var(Y_i)$, $\rho = \rho(X_i, Y_i)$
Demuestre que $\rho(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n Y_i) = \rho$

Resumen 1

Definición 1 (V.a. continua). Una v.a. X es continua si existe una función no-negativa definida para todo número real, tal que para todo $B \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

A f la llamamos función de densidad de probabilidad de X

Propiedades 1. 1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

2. Dado $B = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

3. Dado $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = a) = 0$

4. *Función distribución acumulada*, dado $a \in \mathbb{R}$, $F(a) = \mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx$

Definición 2. Dada X una v.a. continua, se define su **esperanza**, o valor esperado, como

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Definición 3. Dada X una v.a. continua y g una función real, entonces la esperanza de la v.a. $g(X)$ esta dada por

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

Definición 4. Dada X v.a., se define su **varianza** como

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

V.a. continuas

1. **Uniforme:** $X \sim U(a, b)$, entonces

$$\blacksquare f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)$$

$$\blacksquare \mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$$

$$\blacksquare Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2. **Normal:** $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$\blacksquare f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\blacksquare \mathbb{E}[X] = \mu$$

$$\blacksquare Var(X) = \sigma^2$$

■ Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, la llamamos v.a. normal estándar.

3. **Exponencial:** $X \sim \text{exp}(\lambda)$, entonces

$$\blacksquare f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\blacksquare \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\blacksquare Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Definición 5. Dada una v.a. X y $k \in \mathbb{N}$, le llamamos **Momento de orden k** al valor esperado de X^k

$$\mu_k = \mathbb{E}[X^k]$$

Definición 6. Dada una v.a. X y $t \in \mathbb{R}$, se define la **función generadora de momentos** de X como

$$M(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Al derivar $M(t)$ se pueden generar todos los momentos de la v.a. X .

$$\frac{1}{10-4} \mathbb{I}_{[4,10]} \sim \text{Unif}(4,10)$$

$$\frac{1}{20-10} \mathbb{I}_{[10,20]} \sim \text{Unif}(10,20)$$

Resumen 2

Definición 7 (Vectores Aleatorios). Un vector aleatorio $X = (X_k)_{k=1}^n$ y $x = (x_k)_{k=1}^n \in R^n$ se cumple que la:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

A F la llamamos función de Distribución de probabilidad de X

Definición 8 (Funciones marginales). Dado un vector aleatorio $X = (X_k)_{k=1}^n$ y $x = (x_k)_{k=1}^n \in R^n$ se define la función de distribución marginal:

$$F_{X_k}(x_k) = \lim_{(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \rightarrow \infty} F_X(x) = P(X_k \leq x_k)$$

A F la llamamos función de Distribución de probabilidad de X

Definición 9. Sea X un vector aleatorio discreto. Se define la función de probabilidad de X , $p_X : R^n \rightarrow [0, 1]$, como:

$$p_X(x) = P(X = x) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

Por ejemplo caso $k = 3$: $X = (X_1, X_2, X_3)$ y $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2, x_3 \in R} P_X(x)$

Definición 10. Sea X un vector aleatorio continuo. Se define:

$$P(X \in B) = \int_B f_X(x) dx$$

Obs: A esta función $f_X(x)$ se le conoce como densidad conjunta y note que esta integral suele ser una integral en más de una dimensión.

Por ejemplo: Sea $B = R_+^2$ (El primer cuadrante) y sea $f_X(x) = \frac{1_{\{x^2+y^2 \leq 1\}}(x, y)}{\pi}$, se tiene que:

$$P(X \in B) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_X(x) dx dy = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi} r d\theta dr = \frac{1}{4}$$

Las funciones de densidad marginal se definen de manera análoga, sea $X = (X_1, X_2, X_3)$.

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_X(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3$$

Propiedades 2. $\frac{\partial^n F_X(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = f_X(x)$

Obs: Si las componentes de un vector aleatorio, son variables independientes:

$$F_X(x) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$$

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$$

$$\frac{\partial^n F_X(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \prod_{i=1}^n \frac{\partial F_{X_i}(x_i)}{\partial x_i} = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) = f_X(x)$$

Definición 11 (Covarianza). Dadas dos v.a.'s X, Y , al **covarianza** indica la relación entre ambas variables, y se define como

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$$

Trabajando la expresión, se tiene que

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$

Con los cual, si X e Y son independientes, $Cov(X, Y) = 0$. (la inversa **no** es cierta)

Propiedades 3. Dadas X, Y v.a.'s, se cumple que

$$1. Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$$

$$2. Cov(X, X) = Var(X)$$

$$3. Cov(aX, Y) = aCov(X, Y) \text{ para todo } a \in \mathbb{R}.$$

$$4. Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$$

$$5. Covarianza es lineal en las sumas en cada componente, es decir, dadas $X_1, \dots, X_n$ e $Y_1, \dots, Y_m$ v.a.'s,$$

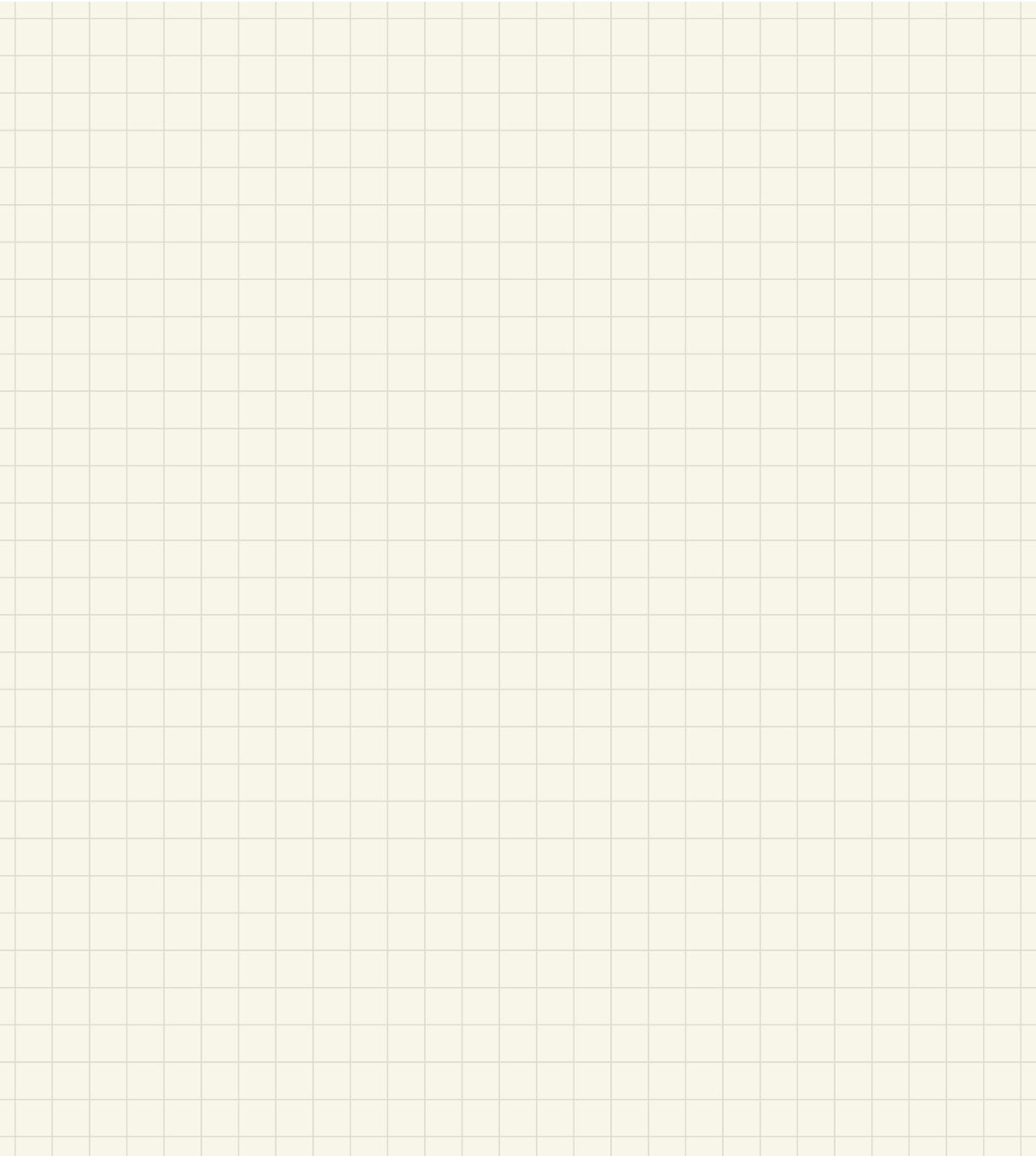
$$Cov(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Cov(X_i, Y_j)$$

Definición 12 (Coeficiente correlación). Dadas X, Y v.a.'s, se define el coeficiente de correlación $\rho(X, Y)$ entre ambas variables como

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

P1. Se obtienen dos mediciones independientes de una cantidad μ . Estas mediciones se modelan como dos v.a. X e Y normales con la misma esperanza: $E[X] = E[Y] = \mu$, pero distinta varianzas: $Var(X) = \sigma_X^2$, $Var(Y) = \sigma_Y^2$. Si se combinan ambas mediciones para obtener un promedio ponderado de la medición a través de la nueva v.a. $Z = \alpha X + (1 - \alpha)Y$, con $\alpha \in [0, 1]$:

- a) Muestre que $E[Z] = \mu$.
- b) Calcule $Var(Z)$. Encuentre el valor de α que minimiza la varianza del promedio ponderado, en función de σ_X^2 y σ_Y^2 .



P2. Sea (X, Y) un vector aleatoria con densidad conjunta

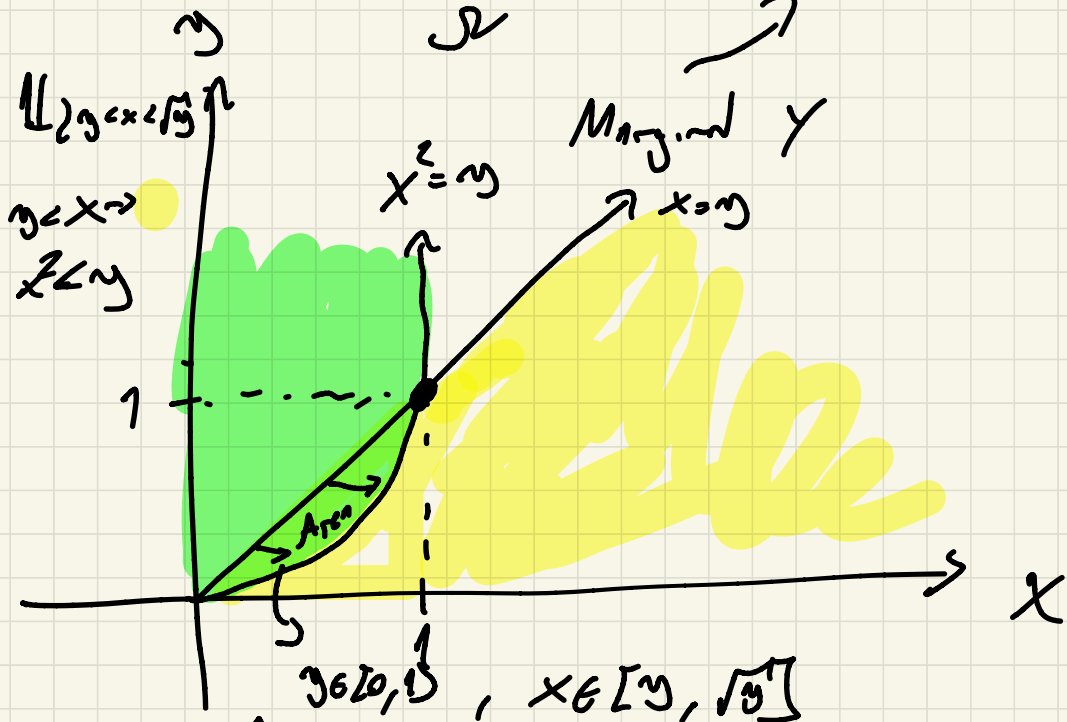
$$f_{X,Y}(x,y) = 12x1_{\{y < x < \sqrt{y}\}}$$

- Plantee las integrales para calcular $P(X > 1/2 | Y < 1/2)$
- Sea $y > 0$, calcule $E(X|Y = y)$ ¿Son X e Y independientes?

Primer lema condicional y su definición

$$P(X > \frac{1}{2} \mid Y < \frac{1}{2}) = \frac{P(X > \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{2})}{P(Y < \frac{1}{2})}$$

Calcular este
 Ω

$$P(Y < \frac{1}{2})$$


$$f_y^{(2)} = \int_{y_0}^{\tilde{y}_y} 12x \, dx = 6x^2 \Big|_{y_0}^{\tilde{y}_y} = 6(v_0 - v^2)$$

$$f_Y(y) = 6(y - y^2) \mathbb{1}_{\{0 < y < 1\}}$$

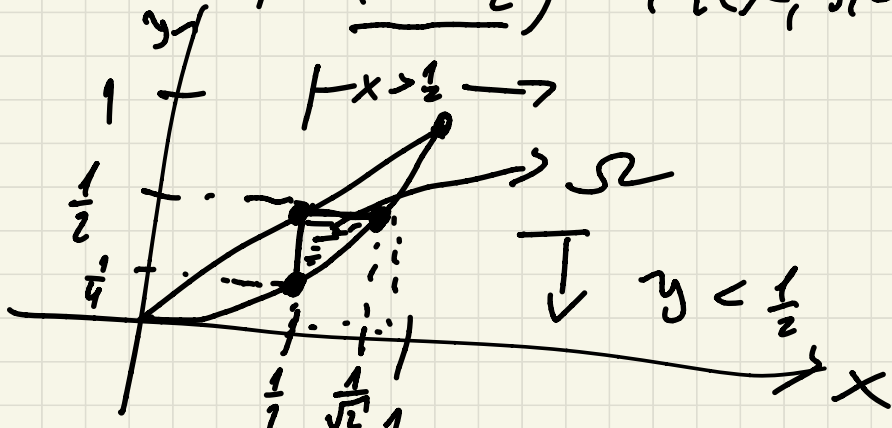
$$P(Y < \frac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} 6(y - y^2) \mathbb{1}_{\{0 < y < 1\}} dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 6(y - y^2) dy$$

$$= 3y^2 - 2y^3 \Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{2}{8} \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$P(X > \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{2}) = P((X, Y) \in \Omega)$$



$$\begin{array}{l|l}
 \text{No.} & \\
 \hline
 y \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] & x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{y} \right] \\
 x \in \left[\frac{1}{2}, \sqrt{y} \right] & y \in \left[x^2, \frac{1}{2} \right]
 \end{array}$$

$$(x, y) \in \mathcal{R} \iff (x, y) \in \mathcal{R}$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} 12x \, dx \, dy = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 6x^2 \Big|_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 6 \left(y - \frac{1}{4} \right) dy$$

$$= 3y^2 - 3 \frac{y}{2} \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{3}{16} + \frac{3}{8} = \boxed{\frac{3}{16}}$$

$$P\left(X > \frac{1}{2} \mid Y < \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}$$

b)

y livres

Se assume entre $(0,1)$

$$f(X|Y=y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}$$

$$= \frac{12x \mathbb{1}_{\{y < x < \sqrt{y}\}}}{6(y-y^2)}$$

$$= \frac{2x}{y-y^2} \mathbb{1}_{\{y < x < \sqrt{y}\}}$$

$$E(X|Y=y) = \int_y^{\sqrt{y}} \frac{2x^2}{(y-y^2)} dx$$

$$= \frac{2}{3} x^3 \cdot \frac{1}{y-y^2} \Big|_{\sqrt{y}}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{(\sqrt{y})^3 - y^3}{y - y^2}$$

$$= \boxed{\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{y} - y^2}{y - y^2}}$$

X, Y son dependientes

P3. Para ir de la Facultad a su casa, usted tiene dos opciones: puede esperar el bus de la línea A en el paradero correspondiente, o bien el bus de la línea B en otro paradero. Los tiempos T_A y T_B (en minutos) que tarda en pasar el siguiente bus de la línea respectiva son variables aleatorias exponenciales independientes de parámetros λ_A y λ_B respectivamente. Suponga que usted escoge el paradero al azar, independiente de T_A y T_B . Sea T su tiempo de espera para abordar al bus.

1. Encuentre $P(T_A < T_B)$.

2. Si a los t minutos usted sigue en el paradero, ¿cuál es la probabilidad de que esté esperando el bus de la línea A? Suponiendo $\lambda_B > \lambda_A$, ¿qué ocurre cuando t es grande?

3. Usted cambia su estrategia: se ubica a medio camino entre los paraderos, y apenas visualiza el primer bus que viene llegando, usted corre al paradero correspondiente y aborda el bus. ¿Cuál es la distribución de T con esta estrategia.

Propuestas

$$\left. \begin{array}{l} T_A \sim \exp(\lambda_A) \Rightarrow \lambda_A e^{-\lambda_A t} \text{ // (ok)} \\ T_B \sim \exp(\lambda_B) \Rightarrow \lambda_B e^{-\lambda_B t} \text{ // (ok)} \end{array} \right\} \text{ independientes}$$

S: me dicen el tiempo A

es un valor al azar entre 5 y 10 min.

$$T_A \sim U(5, 10) \Rightarrow f_A = \frac{1}{5} \text{ // } \{5 \leq x \leq 10\}$$

Como son independientes

$$f_{T_A, T_B} = f_{T_A} \cdot f_{T_B}$$

$$X \sim \text{Unif} \{A, B\}$$

$$P(X=A) = \frac{1}{2}$$

$$P(X=B) = \frac{1}{2}$$

$T \sim$ Tempo de espera

$$P(T > t | X=A) = P(T_A > t)$$

$$P(T > t | X=B) = P(T_B > t)$$

$$P(T > t) = \overset{\text{Prob. T.T.}}{P(T > t | X=A) P(X=A) + P(T > t | X=B) P(X=B)}$$

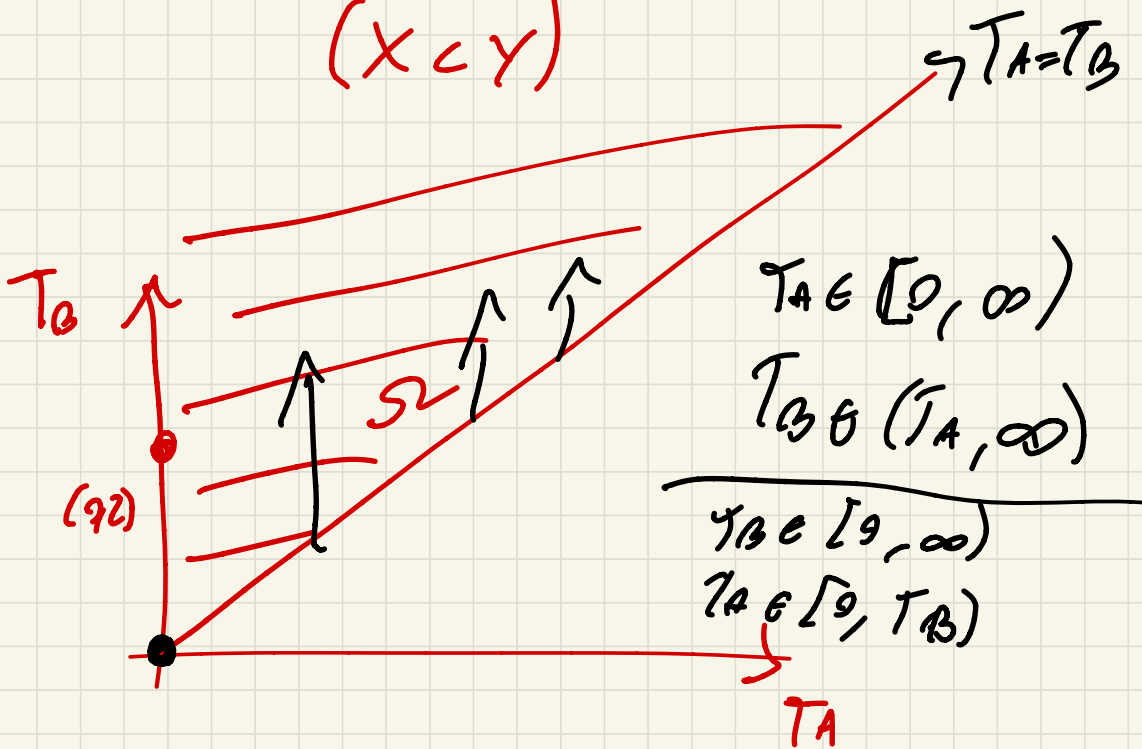
$$1) P(T_A < T_B)$$

$$P(T_A < 5) = \int_{-\infty}^5 \lambda_A e^{-\lambda_A t} \mathbb{1}_{\{t \geq 0\}} dt$$

$$= \int_0^{T_B} \lambda_A e^{-\lambda_A t} dt$$

$$f_{T_A, T_B}(t_1, t_2) = \lambda_A \lambda_B e^{-\lambda_A t_1 - \lambda_B t_2}$$

Dibuat $T_A < T_B$
 $(X < Y)$



$$P(T_A < T_B) = P((T_A, T_B) \in \Omega)$$

$$= \iint_{\Omega} f_{T_A, T_B}(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda_A e^{-\lambda_A t_1} \left(\int_{t_1}^{\infty} \lambda_B e^{-\lambda_B t_2} dt_2 \right) dt_1$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda_A e^{-\lambda_A t_1} \left(-e^{-\lambda_B t_2} \right)_{t_1}^{\infty} dt_1$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda_A \cdot e^{-\lambda_A t_1} \cdot e^{-\lambda_B t_1} dt_1$$

$$= \frac{\lambda_A}{(\lambda_A + \lambda_B)} \int_0^{\infty} (\lambda_A + \lambda_B) e^{-(\lambda_A + \lambda_B) t_1} dt_1$$

$$P(t_A < t_B) = \boxed{\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}} \quad 1$$

$$2) P(X=A | T > t)$$

$f_T \sim$ No cado

f_{T_A} ✓

f_{T_B} ✓

Eslo que

me dice.

Preferir Trabajar con T sola

Al saber parametro

Usar en bayes

$$P(X=A | T > t) = \frac{P(T > t | X=A) P(X=A)}{P(T > t)}$$

$$P(X=A | T > t) = \frac{P(T_A > t) \cdot \frac{1}{2}}{P(T > t)}$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{prob.}}{=} \frac{P(T_A > t) \cdot \frac{1}{2}}{P(T > t | X=A)P(X=A) + P(T > t | X=B)P(X=B)} \\ & = \frac{P(T_A > t) \cdot \frac{1}{2}}{P(T_A > t) \cdot \frac{1}{2} + P(T_B > t) \cdot \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{P(T_A > t)}{P(T_A > t) + P(T_B > t)}$$

$$P(E > t) \quad \text{cor} \quad E \sim \exp(\lambda)$$

$$P(E > t) = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$\Omega = [t, \infty)$

$$= (-e^{-\lambda x}) \Big|_t^{\infty} = e^{-\lambda t}$$

$$P(X=A|T>t) = \frac{e^{-\lambda_0 t}}{e^{-\lambda_0 t} + e^{-\lambda_1 t}}$$

$$P(X=A|T>t) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{(\lambda_0 - \lambda_1) t}{\text{prolin}}}}$$

$$(\lambda_0 - \lambda_1 > 0)$$

Que pour $t \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow P(X=A|T>t) = 1$$

$$T = \text{Min}(T_A, T_B)$$

$$\underline{P(T > t) = P(\text{Min}(T_A, T_B) > t)}$$

$$= P(T_A > t, T_B > t)$$

$$\stackrel{\text{Ind}}{=} P(T_A > t) P(T_B > t)$$

$$= e^{-\lambda_A t} \cdot e^{-\lambda_B t}$$

$$= \boxed{e^{-(\lambda_A + \lambda_B) t}}$$

$$T \sim \exp(\underline{\lambda_A + \lambda_B})$$

$$\begin{aligned} E &\sim \exp(\underline{\lambda}) \\ P(E > t) &= e^{-\underline{\lambda} t} \end{aligned}$$