MA3403-4. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 19 de noviembre de 2021

Auxiliar 11: Más Vectores aleatorios

P1. Se obtienen dos mediciones independientes de una cantidad μ. Estas mediciones se modelan como dos v.a. X e Y normales con la misma esperanza: $E[X] = E[Y] = \mu$, pero distinta varianza:$Var(X) = \sigma_X^2$, $Var(Y) = \sigma_Y^2$. Si se combinan ambas mediciones para obtener un promedio ponderado de la medición a través de la nueva v.a. $Z = \alpha X + (1 - \alpha)Y$, con $\alpha \in [0, 1]$:

a) Muestre que E[Z] = µ.

b) Calcule $Var(Z)$. Encuentre el valor de α que minimiza la varianza del promedio ponderado, en función de σ_X^2 y σ_Y^2.

P2. Sea (X, Y) un vector aleatoria con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = 12x1_{\{y<x<\sqrt{y}\}}$$

a) Plantee las integrales para calcular $P(X > 1/2|Y < 1/2)$

b) Sea $y > 0$, calcule $E(X|Y = y)$ ¿Son X e Y independientes?

P3. Para ir de la Facultad a su casa, usted tiene dos opciones: puede esperar el bus de la línea A en el paradero correspondiente, o bien el bus de la línea B en otro paradero. Los tiempos T_A y T_B (en minutos) que tarda en pasar el siguiente bus de la línea respectiva son variables aleatorias exponenciales independientes de parámetros λ_A y λ_B, respectivamente. Suponga que usted escoge el paradero al azar, independiente de T_A y T_B. Sea T su tiempo de espera para abordar al bus.

1. Encuentre $P(T_A < T_B)$.
2. Si a los t minutos usted sigue en el paradero, ¿cuál es la probabilidad de que esté esperando el bus de la línea A? Suponiendo $\lambda_B > \lambda_A$, ¿qué ocurre cuando t es grande?
3. Usted cambia su estrategia: se ubica a medio camino entre los paraderos, y apenas visualiza el primer bus que viene llegando, usted corre al paradero correspondiente y aborda el bus. ¿Cuál es la distribución de T con esta estrategia.

Propuestos

Prop1 Sea (X_i, Y_i), con $i = 1, ..., n$, con $n \in N$, una secuencia de vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos. Esto es que, "conjuntamente", (X_1, Y_1) es independientes, y tienen la misma distribución, que (X_2, Y_2) y así sucesivamente. De este modo, para un i y j arbitrarios, tales que $i \neq j$, se tiene que X_i y Y_i pueden ser dependientes mientras que Xi y Yj son independientes. Además se tiene que para todo i: $\mu_x = E(X_i)$, $\mu_y = E(Y_i)$, $\sigma_x^2 = Var(X_i)$, $\sigma_y^2 = Var(Y_i)$, $\rho = \rho(X_i, Y_i)$
Demuestre que $\rho\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n Y_i\right) = \rho$

Resumen 1

Definición 1 (V.a. continua)**.** Una v.a. X es continua si exista una función no-negativa definida para todo número real, tal que para todo $B \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

A f la llamamos función de densidad de probabilidad de X

Propiedades 1.

1. *$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$*
2. *Dado $B = [a,b] \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$*
3. *Dado $a \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X = a) = 0$*
4. *Función distribución acumulada, dado $a \in \mathbb{R}$, $F(a) = \mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$*

Definición 2. Dada X una v.a. continua, se define su **esperanza**, o valor esperado, como

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Definición 3. Dada X una v.a. continua y g una función real, entonces la esperanza de la v.a. $g(X)$ esta dada por

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)fx$$

Definición 4. Dada X v.a., se define su **varianza** como

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

V.a. continuas

1. **Uniforme:** X $U(a,b)$, entonces
   - $f(x) = \dfrac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)$
   - $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$
   - $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
2. **Normal:** X $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces
   - $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
   - $\mathbb{E}[X] = \mu$
   - $Var(X) = \sigma^2$
   - Si X $\mathcal{N}(0,1)$, la llamamos v.a. normal estándar.
3. **Exponencial:** X $exp(\lambda)$, entonces
   - $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
   - $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{\lambda}$
   - $Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Definición 5. Dada una v.a. X y $k \in \mathbb{N}$, le llamamos Momento de orden k al valor esperado de X^k

$$\mu_k = \mathbb{E}[X^k]$$

Definición 6. Dada una v.a. X y $t \in \mathbb{R}$, se define la función generadora de momentos de X como

$$M(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Al derivar $M(t)$ se pueden generar todos los momentos de la v.a. X.

Resumen 2

Definición 7 (Vectores Aleatorios)**.** Un vector aleatorio $X = (X_k)_{k=1}^n$ y $x = (x_k)_{k=1}^n \in R^n$ se cumple que la:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n)$$

A F la llamamos función de Distribución de probabilidad de X

Definición 8 (Funciones marginales)**.** Dado un vector aleatorio $X = (X_k)_{k=1}^n$ y $x = (x_k)_{k=1}^n \in R^n$ se define la función de distribución marginal:

$$F_{X_k}(x_k) = \lim_{(x_1,..,x_{k-1},x_{k+1},..,x_n)\to\infty} F_X(x) = P(X_k \leq x_k)$$

A F la llamamos función de Distribución de probabilidad de X

Definición 9. Sea X un vector aleatorio discreto. Se define la función de probabilidad de X, $pX : R^n \to [0, 1]$, como:

$$p_X(x) = P(X = x) = P(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)$$

Por ejemplo caso $k = 3$: $X = (X_1, X_2, X_3)$ y $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2,x_3\in R} P_X(x)$

Definición 10. Sea X un vector aleatorio continuo. Se define:

$$P(X \in B) \int_B f_X(x)dx$$

Obs: A esta función $f_X(x)$ se le conoce como densidad conjunta y note que esta integral suele ser una integral en más de una dimensión.
Por ejemplo: Sea $B = R_+^2$ (El primer cuadrante) y sea $f_X(x) = \dfrac{1_{\{x^2+y^2\leq 1\}}(x, y)}{\pi}$, se tiene que:

$$P(X \in B) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_X(x)dxdy = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi} r d\theta dr = \frac{1}{4}$$

Las funciones de densidad marginal se definen de manera análoga, sea $X = (X_1, X_2, X_3)$.

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_X(x_1, x_2, x_3)dx_2dx_3$$

Propiedades 2. $\dfrac{\partial^n F_X(x)}{\partial x_1...\partial x_n} = f_X(x)$

Obs: Si las componentes de un vector aleatorio, son variables independientes:

$$F_X(x) = \prod_{i=1}^n F_{X\,i}(x_i)$$

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^n f_{X\,i}(x_i)$$

$$\frac{\partial^n F_X(x)}{\partial x_1...\partial x_n} = \prod_{i=1}^n \frac{\partial F_{X\,i}(x_i)}{\partial x_i} = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) = f_X(x)$$

Definición 11 (Covarianza)**.** Dadas dos v.a.'s X, Y, al **covarianza** indica la relación entre ambas variables, y se define como

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right)$$

Trabajando la expresión, se tiene que

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}\left(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)\right)$$

Con los cual, si X e Y son independientes, $Cov(X, Y) = 0$. (la inversa **no** es cierta)

Propiedades 3. *Dadas X, Y v.a.'s, se cumple que*

1. $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
2. $Cov(X, X) = Var(X)$
3. $Cov(aX, Y) = aCov(X, Y)$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$.
4. $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$
5. *Covarianza es lineal en las sumas en cada componente, es decir, dadas $X_1, ..., X_n$ e $Y_1, ..., Y_m$ v.a.'s,*

$$Cov\left(\Sigma_{i=1}^n X_i, \Sigma_{j=1}^m Y_j\right) = \Sigma_{i=1}^n \Sigma_{j=1}^m Cov(X_i, Y_j)$$

Definición 12 (Coeficiente correlación)**.** Dadas X, Y v.a.'s, se define el coeficiente de correlación $\rho(X, Y)$ entre ambas variables como

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$