MA3403-4. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 12 de noviembre de 2021

Auxiliar 10: Vectores aleatorios

$R_x = [0, \infty)$
$R_y = [0, \infty)$

P1. Sea (X, Y) vector aleatorio con densidad:

$$f_{X,Y}(x, y) = e^{-(x+y)} 1_{\{x>0,y>0\}}$$

Calcule las densidades marginales, $P(X \geq Y \geq 2)$ y $P(2 - Y \geq X \geq Y)$ y $E(X)$ ¿Que se puede decir acerca de la dependencia entre X e Y.

P2. En una tienda de compra y venta de vehículos, se paga una cantidad X por auto y los venden a una cantidad Y, con X, Y v.a.'s que tienen densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x}{36} & 0 < x < y < 6 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Encuentre las densidades marginales de X e Y

b) Calcule $\mathbb{E}(X|Y = y)$ y $\mathbb{E}(Y|X = x)$.

c) ¿Cuál es el valor esperado de las ganancias por la compra y venta de vehículos?

P3. Sean X, Y v.a.'s con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} & x, y \in [0, \infty) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Sean $Z = \dfrac{X}{X + Y}$ y $W = X + Y$. Calcule las densidad marginales de Z y W. ¿Son independientes? Calcule $Var(Z)$.

Propuestos

Prop1. La fuerza magnética H en un punto P ubicado a X unidades de un cable con corriente I, queda dada por:

$$H = \frac{2I}{X}$$

a) Si P es un punto variable con X e I, suponiendo que X se distribuye uniforme en el intervalo $(2, 4)$ e I uniforme en el intervalo $(10, 20)$ (ambas variables independientes), calcule la función de densidad de H.

b) Calcule $P(H > 10|X < 3)$

Resumen 1

Definición 1 (V.a. continua)**.** Una v.a. X es continua si exista una función no-negativa definida para todo número real, tal que para todo $B \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

A f la llamamos función de densidad de probabilidad de X

Propiedades 1.

1. *$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$*
2. *Dado $B = [a,b] \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$*
3. *Dado $a \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X = a) = 0$*
4. *Función distribución acumulada, dado $a \in \mathbb{R}$, $F(a) = \mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$*

Definición 2. Dada X una v.a. continua, se define su **esperanza**, o valor esperado, como

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Definición 3. Dada X una v.a. continua y g una función real, entonces la esperanza de la v.a. $g(X)$ esta dada por

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)fx$$

Definición 4. Dada X v.a., se define su **varianza** como

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

<u>V.a. continuas</u>

1. **Uniforme:** X $U(a,b)$, entonces
   - $f(x) = \dfrac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)$
   - $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$
   - $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
2. **Normal:** X $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces
   - $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
   - $\mathbb{E}[X] = \mu$
   - $Var(X) = \sigma^2$
   - Si X $\mathcal{N}(0,1)$, la llamamos v.a. normal estándar.
3. **Exponencial:** X $exp(\lambda)$, entonces
   - $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
   - $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{\lambda}$
   - $Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Definición 5. Dada una v.a. X y $k \in \mathbb{N}$, le llamamos Momento de orden k al valor esperado de X^k

$$\mu_k = \mathbb{E}[X^k]$$

Definición 6. Dada una v.a. X y $t \in \mathbb{R}$, se define la función generadora de momentos de X como

$$M(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Al derivar $M(t)$ se pueden generar todos los momentos de la v.a. X.

Resumen 2

Definición 7 (Vectores Aleatorios)**.** Un vector aleatorio $X = (X_k)_{k=1}^n$ y $x = (x_k)_{k=1}^n \in R^n$ se cumple que la:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n)$$

A F la llamamos función de Distribución de probabilidad de X

Definición 8 (Funciones marginales)**.** Dado un vector aleatorio $X = (X_k)_{k=1}^n$ y $x = (x_k)_{k=1}^n \in R^n$ se define la función de distribución marginal:

$$F_{X_k}(x_k) = \lim_{(x_1,..,x_{k-1},x_{k+1},..,x_n)\to\infty} F_X(x) = P(X_k \leq x_k)$$

A F la llamamos función de Distribución de probabilidad de X

Definición 9. Sea X un vector aleatorio discreto. Se define la función de probabilidad de X, $pX : R^n \to [0,1]$, como:

$$p_X(x) = P(X = x) = P(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)$$

Por ejemplo caso $k = 3$: $X = (X_1, X_2, X_3)$ y $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2,x_3\in R} P_X(x)$

Definición 10. Sea X un vector aleatorio continuo. Se define:

$$P(X \in B) \int_B f_X(x)dx$$

Obs: A esta función $f_X(x)$ se le conoce como densidad conjunta y note que esta integral suele ser una integral en más de una dimensión.
Por ejemplo: Sea $B = R_+^2$ (El primer cuadrante) y sea $f_X(x) = \dfrac{1_{\{x^2+y^2\leq 1\}}(x,y)}{\pi}$, se tiene que:

$$P(X \in B) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_X(x)dxdy = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi} r d\theta dr = \frac{1}{4}$$

Las funciones de densidad marginal se definen de manera análoga, sea $X = (X_1, X_2, X_3)$.

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_X(x_1, x_2, x_3)\underline{dx_2}\,\underline{dx_3}$$

Propiedades 2. $\dfrac{\partial^n F_X(x)}{\partial x_1 ... \partial x_n} = f_X(x)$

Obs: Si las componentes de un vector aleatorio, son variables independientes:

$$F_X(x) = \prod_{i=1}^n F_{Xi}(x_i)$$

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^n f_{Xi}(x_i)$$

$$\frac{\partial^n F_X(x)}{\partial x_1 ... \partial x_n} = \prod_{i=1}^n \frac{\partial F_{Xi}(x_i)}{\partial x_i} = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) = f_X(x)$$

P1. Sea (X,Y) vector aleatorio con densidad:

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)} 1_{\{x>0,y>0\}}$$

$\mathbb{1}_{\{x>0\}}$ $\mathbb{1}_{\{y>0\}}$ $R_Y = [0,\infty)$

Calcule las densidades marginales, $P(X \geq Y \geq 2)$ y $P(2 - Y \geq X \geq Y)$ y $E(X)$ ¿Que se puede decir acerca de la dependencia entre X e Y.

$y = 2 - x$ graficarlo

P2. En una tienda de compra y venta de vehículos, se paga una cantidad X por auto y los venden a una cantidad Y, con

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+y)}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\,dy$$

$$= e^{-x}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-y}\,dy}$$

$$\boxed{f_X(x) = e^{-x}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)} \qquad \underbrace{\left(-e^{-y}\right)\Big|_0^{\infty}}_{1}$$

De manera analoga

$$\boxed{f_Y(y) = e^{-y}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)}$$

$$X \perp Y \iff f_X(x) \cdot f_Y(y) = f_{X,Y}(x,y)$$

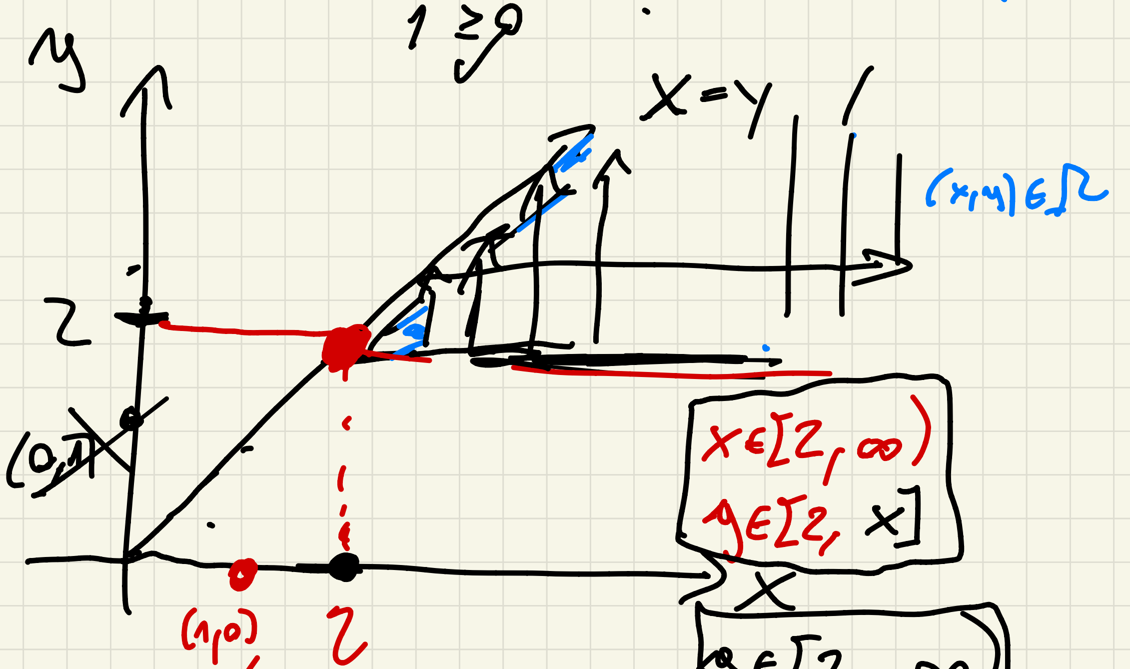
independientes

Lo cumple, pues

$$1_{[x>0]} \cdot 1_{[y>0]} = 1_{[x>0,\, y>0]}$$

Cual es $\boxed{X \geq Y \geq 2 = \Omega}$

$1 \geq 0$ ✓



$$\boxed{\begin{array}{l} x \in [2, \infty) \\ y \in [2, x] \end{array}}$$

$$\begin{array}{l} y \in [2, \infty) \\ x \in [y, \infty) \end{array}$$

$$P(X \geq Y \geq 2) = P((X,Y) \in \Omega)$$

$$= \int_{\Omega} f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{\Omega} f(x,y)\, dy\, dx$$

$$= \int_2^{\infty} \int_2^{x} e^{-(x+y)}\, dy\, dx$$

$$= \int_2^{\infty} e^{-x} \left(\int_2^{x} e^{-y}\, dy \right) dx$$

$$= \int_2^{\infty} e^{-x} \left(e^{-2} - e^{-x} \right) dx$$

$$= e^{-2} \left(\int_2^{\infty} e^{-x}\, dx \right) - \int_2^{\infty} e^{-2x}\, dx$$

$$= e^{-2}(e^{-2} - 0) + \left.\frac{e^{-2x}}{2}\right|_2^\infty$$

$$= e^{-4} - \frac{e^{-4}}{2} = \boxed{\frac{e^{-4}}{2}}$$

Propuesta la otra

$$E(x) = \int_0^\infty x \, f_x(x) \, dx$$

$$= \int_0^\infty x e^{-x} \, dx$$

$$= \boxed{1}$$

$$f_x(x) \sim exp(1)$$

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{1}$$

$$E(g(x,y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f(x,y)\,dx\,dy$$

Puede
Tener
indicatrices

$x+y$

$\dfrac{x}{y}$, xy

$x^2 e^y$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\right) dx$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_x(x)\,dx$$

P2. En una tienda de compra y venta de vehículos, se paga una cantidad X por auto y los venden a una cantidad Y, con X, Y v.a.'s que tienen densidad conjunta

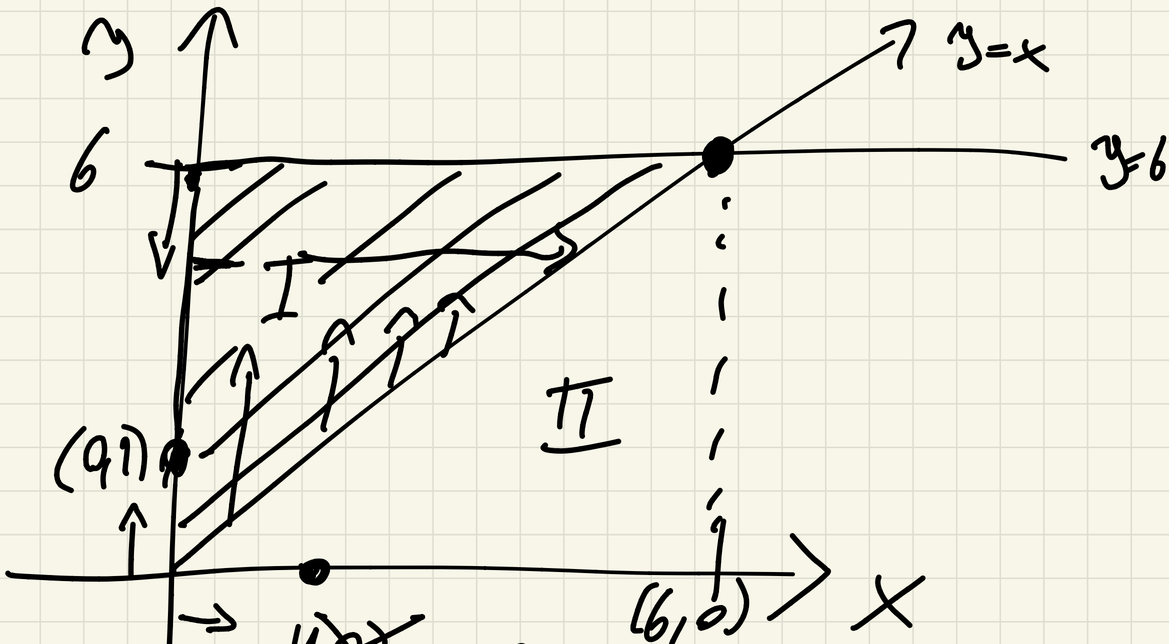
$x < y$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{36} & 0 < x < y < 6 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = (x,y) \in \Omega$$

a) Encuentre las densidades marginales de X e Y

b) Calcule $\mathbb{E}(X|Y = y)$ y $\mathbb{E}(Y|X = x)$. $\rightarrow$ Solo sentido si $y \in [0,6]$ $x \in [x,6]$

c) ¿Cuál es el valor esperado de las ganancias por la compra y venta de vehículos?



No cumple $\boxed{x < y}$

Opción 1

$X \in (0, 6)$

$y \in (x, 6)$

Opción 2

$y \in (0, 6)$

$x \in (0, y)$

$$f_X(x) = \left(\int_x^6 f(x,y)\,dy\right) \mathbb{1}_{[0,6]}(x)$$

Uso opción 1

$$= \left(\int_x^6 \frac{x}{36}\,dy\right) \mathbb{1}_{[0,6]}(x)$$

$$f_X(x) = \frac{x(6-x)}{36} \mathbb{1}_{[0,6]}(x)$$

$$f_Y(y) = \left(\int_0^y \frac{x}{36}\,dx\right) \mathbb{1}_{[0,6]}(y)$$

opción 2

$$= \left.\frac{x^2}{72}\right|_0^y \mathbb{1}_{[0,6]}(y)$$

$$f_Y(y) = \frac{y^2}{72} \mathbb{1}_{[0,6]}(y)$$

b) $y \in [0,6]$

Conjunta

$$f_{X|Y}(x \mid Y=y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Marginal

$$= \frac{\frac{x}{36} \mathbb{1}_{(0,6)}(y) \cdot \mathbb{1}_{(0,y)}(x)}{\frac{y^2}{72} \mathbb{1}_{(0,6)}(y)}$$

$$f_{X|Y}(x \mid Y=y) = \frac{2x}{y^2} \mathbb{1}_{[0,y)}(x)$$

$$E(X \mid \underbrace{Y=y}_{y \in (0,6)}) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{2x}{y^2} \underbrace{\mathbb{1}_{(0,y)}(x)}\, dx$$

$$= \int_0^y \frac{2x^2}{y^2}\, dx$$

$$= \frac{2}{y^2} \int_0^y x^2\, dx$$

$$= \frac{2}{y^2} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^y$$

$$= \boxed{\frac{2}{3} y} \neq E(X)$$

No pueden
ser ind

$x \in [0,6)$

$$f_{Y|X}(y|X=x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

$$= \frac{\frac{x}{36} \cdot \cancel{\mathbb{1}_{(0,6)}(x)}\, \mathbb{1}_{(x,6)}(y)}{\frac{x(6-x)}{36}\, \cancel{\mathbb{1}_{(0,6)}(x)}}$$

$$f_{Y|X}(y|X=x) = \frac{1}{(6-x)}\, \mathbb{1}_{(x,6)}(y)$$

$$E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(6-x)}\, \mathbb{1}_{(x,6)}(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{(6-x)} \int_x^6 y\,dy$$

$$E(Y|X=x) = \frac{6^2 - x^2}{2(6-x)} = \boxed{\frac{6+x}{2}}$$

c) X Costo

Y Precio de Venta

$$G = Y - X$$

$$E(G) = E(Y-X) = \overset{\text{Marginal } Y}{E(Y)} - \overset{\text{Marginal } X}{E(X)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (y-x)\,\frac{x}{36}\,\mathbb{1}_{[0,6]}(y)\,\mathbb{1}_{[0,y)}(x)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^6 \int_0^y \frac{(y-x)\,x}{36}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{36}\int_0^6 \left(y \int_0^y x\,dx - \int_0^y x^2\,dx \right) dy$$

$$= \frac{1}{36}\int_0^6 \left(y \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) dy$$

$$= \frac{1}{36}\int_0^6 \frac{y^3}{6}\,dy$$

$$= \frac{1}{6^3}\left(\frac{y^4}{4} \right)_0^6 = \frac{6}{4} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$\cancel{E(XY) = E(X)E(Y)}$$

Solo si son ind

P3. Sean X, Y v.a.'s con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} & x, y \in [0,\infty) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Sean $Z = \dfrac{X}{X+Y}$ y $W = X+Y$. Calcule las densidad marginales de Z y W. ¿Son independientes? Calcule $Var(Z)$.

$$g(X,Y) = (Z, W) = (g_1, g_2)$$

$$= \left(\frac{X}{X+Y}, X+Y \right)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = \left(\frac{1}{x+y} + \frac{-x}{(x+y)^2} \right)$$

$$= \frac{x+y-x}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{-x}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial g_2}{\partial y} = 1$$

$$J_g = \begin{bmatrix} \frac{y}{(x+y)^2} & \frac{-x}{(x+y)^2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(J_g) = \frac{y}{(x+y)^2} + \frac{x}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{1}{x+y}$$

$$\underbrace{|\mathrm{Det}(J_g)|}^{-1} = |x+y|$$

$$f_{z,w}(z,w) = f_{x,y}(g^{-1}(z,w)) \cdot |\mathrm{Det}(J_g)|^{-1}$$

$$= \lambda^2 e^{-(x+y)\lambda} |x+y| \mathbb{1}_{[0,\infty)}^{(x)} \mathbb{1}_{[0,\infty)}^{(y)}$$

Cosas que notas $\quad x+y=w$

$$\boxed{w\cdot z = x}$$

$$\boxed{w(1-z) = y}$$

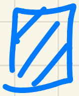
$$f_{z,w}(z,w) = \lambda^2 e^{-w\lambda} \, |w| \, \mathbb{1}_{\{0<wz<\infty\}} \mathbb{1}_{\{0<w(1-z)\ldots}$$

Vamos a mejorarlo buscando otras indicatrices

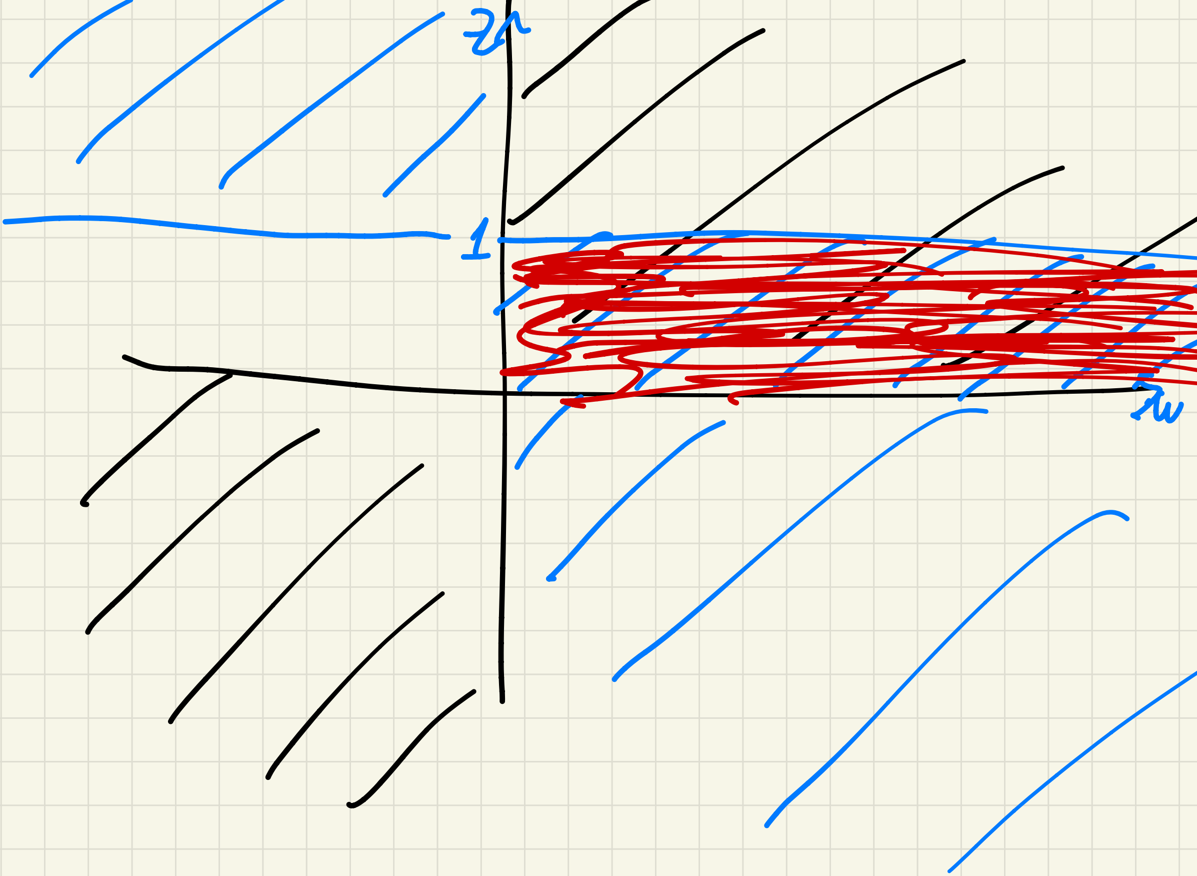
$0 < wz < \infty \quad (1)$

$0 < w(1-z) < \infty \quad (2)$

① 

② 

 Lo que importa



$$\mathbb{1}_{\{0<w<\infty\}} \cdot \mathbb{1}_{\{0<z<1\}}$$

$$f_{W,Z}(w,z) = \lambda^2 e^{-\lambda w} w \, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(w) \, \mathbb{1}_{(0,1)}(z)$$

$$f_W(w) = \left(\int_0^1 \lambda^2 e^{-\lambda w} w \, dz\right) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(w)$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda w} w \, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(w)$$

$$f_Z(z) = \underbrace{\left(\lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda w} w \, dw\right)}_{I} \mathbb{1}_{(0,1)}(z)$$

$$f_Z(z) = \frac{I}{\lambda} \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(z)$$

$$\int_0^1 f_Z(z)\, dz = I \cdot \int_0^1 1 \, dz = I = 1$$

$$f_Z(z) = \mathbb{1}_{(0,1)}(z) \sim \text{Unif}(0,1)$$

Como $f_Z(z) \cdot f_W(w) = f_{Z,W}(z,w)$ ✓

son independientes

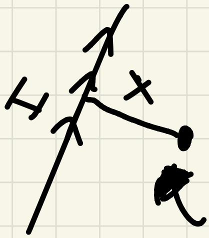
$$\text{Var}(Z) = \text{Var}(\text{Uniforme}(0,1)) = \frac{(b-a)^2}{12} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

Prop1. La fuerza magnética H en un punto P ubicado a X unidades de un cable con corriente I, queda dada por:

$$H = \frac{2I}{X}$$

a) Si P es un punto variable con X e I, suponiendo que X se distribuye uniforme en el intervalo $(2,4)$ e I uniforme en el intervalo $(10,20)$ (ambas variables independientes), calcule la función de densidad de H.

b) Calcule $P(H > 10 | X < 3)$



$X \sim \text{Uniforme}(2,4)$

$I \sim \text{Uniforme}(10,20)$

$$H = \frac{2I}{X}$$

$$f_{X,I}(x,i) = f_X(x) \cdot f_I(i)$$

$$= \frac{1}{2} \mathbb{1}_{(2,4)}(x) \cdot \frac{1}{10} \cdot \mathbb{1}_{(10,20)}(i)$$

$$f_{H,Z}(h,z)$$

$$\boxed{Z = X} \Rightarrow \boxed{\frac{ZH}{2} = I}$$

$$g(X,I) = (H, Z) = \left(\frac{2I}{X}, X\right)$$

$$J_g = \begin{bmatrix} -\frac{2I}{X^2} & \frac{2}{X} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(J_g) = -\frac{2}{X}$$

$$\Rightarrow |\det(J_g)|^{-1} = \left|\frac{X}{2}\right| = \frac{X}{2} = \frac{z}{2}$$

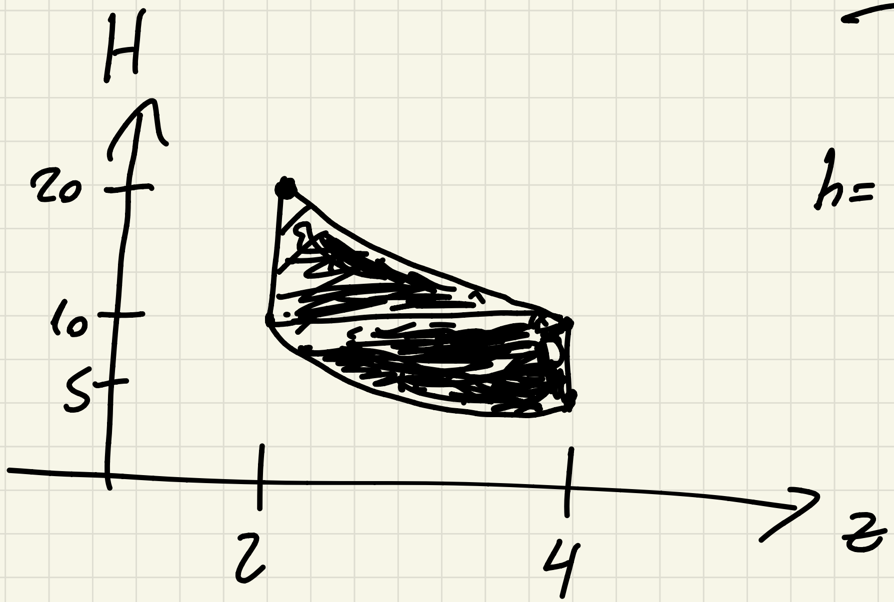
$$f_{H,Z}(h,z) = f_{X,Y}(g^{-1}(h,z)) \cdot \frac{z}{2}$$

$$= \frac{z}{40} \cdot \mathbb{1}_{\{2 \le z \le 4\}} \, \mathbb{1}_{\{10 \le \frac{zH}{2} \le 20\}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{1}_{\{\frac{20}{z} \le H \le \frac{40}{z}\}}$$

$$f_{H,Z}(h,z) = \frac{z}{40} \cdot \mathbb{1}_{\{2 \le z \le 4\}} \cdot \mathbb{1}_{\{\frac{20}{z} \le h \le \frac{40}{z}\}}$$



$$h = \frac{20}{z}$$

$H \in (5, 10)$ Unión $H \in (10, 20)$

$Z \in \left(\frac{20}{H}, 4\right)$ $\quad$ $Z \in \left(2, \frac{40}{H}\right)$

$$f_{H,Z}(h,z) = \frac{z}{40}\left(\mathbb{1}_{(5 \le h \le 10,\ \frac{20}{h} \le z \le 4)} + \mathbb{1}_{(10 \le h \le 20,\ 2 \le z \le \frac{40}{h})}\right)$$

$$f_H(h) = \left(\int_{\frac{20}{h}}^{4} \frac{z}{40}\,dz\right)\mathbb{1}_{[5\leq h\leq 10]} + \left(\int_{2}^{\frac{40}{h}} \frac{z}{40}\,dz\right)\mathbb{1}_{\dots}$$

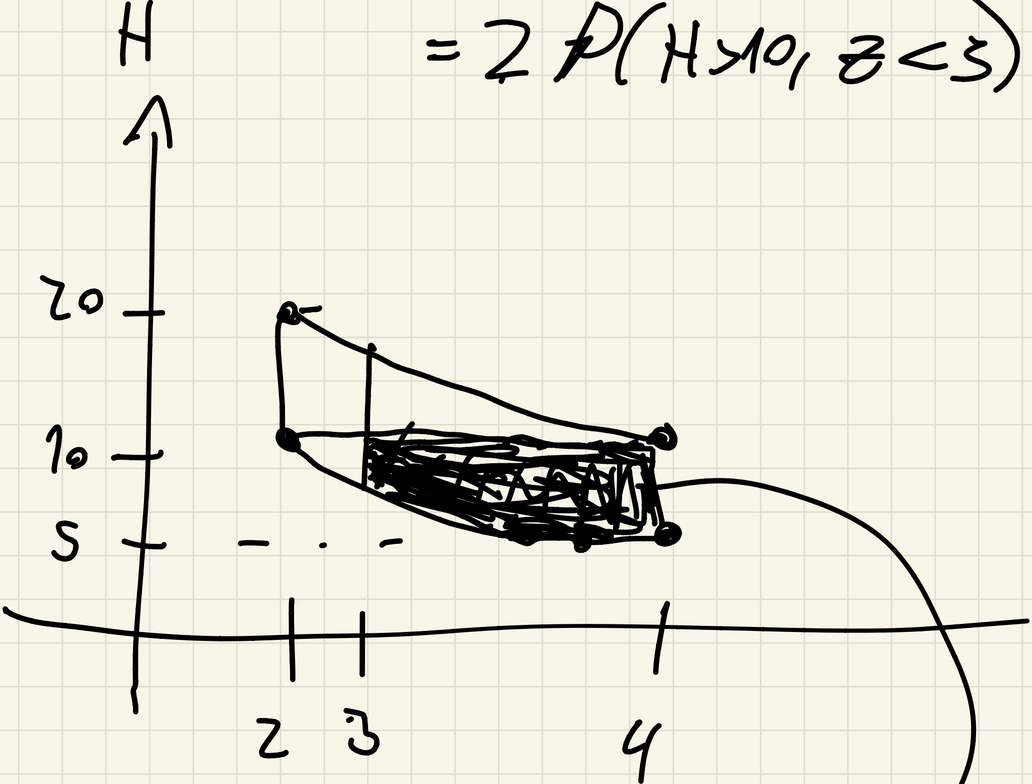
$$= \left(\frac{16}{80} - \frac{\left(\frac{20}{h}\right)^2}{80}\right)\mathbb{1}_A + \left(\frac{\left(\frac{40}{h}\right)^2}{80} - \frac{4}{80}\right)\mathbb{1}_A$$

$$= \left(\frac{1}{5} - \frac{5}{h^2}\right)\mathbb{1}_{\{5\leq h\leq 10\}} + \left(\frac{20}{h^2} - \frac{1}{20}\right)\mathbb{1}_{\{10\leq h\leq 20\}}$$

$$P(H>10 \mid X<3) = \frac{P(H>10, X<3)}{P(X<3)}$$

$$= \frac{P(H>10, X<3)}{P(2<X<3)} = \frac{1}{2}$$

$= 2P(H>10, z<3)$



$z \in (3,4)$

$H \in \left(\frac{20}{z}, 10\right)$

$$\int_3^4 \int_{\frac{20}{z}}^{10} \frac{z}{40}\, dh\, dz = \int_3^4 \frac{z\left(10-\frac{20}{z}\right)}{40}\, dz$$

$$= \int_3^4 \frac{z}{4} - \frac{1}{2} \, dz = \left(\frac{z^2}{8} - \frac{z}{2} \right)_3^4$$

$$= \cancel{2} - \cancel{2} - \frac{9}{8} + \frac{3}{2} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

$$P(H > 10 \mid X < 3) = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{3}{4}}$$