MA3403-4. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 12 de noviembre de 2021

Auxiliar 10: Vectores aleatorios

P1. Sea (X, Y) vector aleatorio con densidad:

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)}1_{\{x>0,y>0\}}$$

Calcule las densidades marginales, $P(X \geq Y \geq 2)$ y $P(2 - Y \geq X \geq Y)$ y $E(X)$ ¿Que se puede decir acerca de la dependencia entre X e Y.

P2. En una tienda de compra y venta de vehículos, se paga una cantidad X por auto y los venden a una cantidad Y, con X, Y v.a.'s que tienen densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{36} & 0 < x < y < 6 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Encuentre las densidades marginales de X e Y

b) Calcule $\mathbb{E}(X|Y = y)$ y $\mathbb{E}(Y|X = x)$.

c) ¿Cuál es el valor esperado de las ganancias por la compra y venta de vehículos?

P3. Sean X, Y v.a.'s con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} & x, y \in [0, \infty) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Sean $Z = \dfrac{X}{X+Y}$ y $W = X + Y$. Calcule las densidad marginales de Z y W. ¿Son independientes? Calcule $Var(Z)$.

Propuestos

Prop1. La fuerza magnética H en un punto P ubicado a X unidades de un cable con corriente I, queda dada por:

$$H = \frac{2I}{X}$$

a) Si P es un punto variable con X e I, suponiendo que X se distribuye uniforme en el intervalo $(2, 4)$ e I uniforme en el intervalo $(10, 20)$ (ambas variables independientes), calcule la función de densidad de H.

b) Calcule $P(H > 10|X < 3)$

Resumen 1

Definición 1 (V.a. continua)**.** Una v.a. X es continua si exista una función no-negativa definida para todo número real, tal que para todo $B \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

A f la llamamos función de densidad de probabilidad de X

Propiedades 1.

1. *$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$*
2. *Dado $B = [a,b] \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$*
3. *Dado $a \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X = a) = 0$*
4. *Función distribución acumulada, dado $a \in \mathbb{R}$, $F(a) = \mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$*

Definición 2. Dada X una v.a. continua, se define su **esperanza**, o valor esperado, como

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Definición 3. Dada X una v.a. continua y g una función real, entonces la esperanza de la v.a. $g(X)$ esta dada por

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)fx$$

Definición 4. Dada X v.a., se define su **varianza** como

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

V.a. continuas

1. **Uniforme:** X $U(a,b)$, entonces
   - $f(x) = \dfrac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)$
   - $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$
   - $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
2. **Normal:** X $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces
   - $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
   - $\mathbb{E}[X] = \mu$
   - $Var(X) = \sigma^2$
   - Si X $\mathcal{N}(0,1)$, la llamamos v.a. normal estándar.
3. **Exponencial:** X $exp(\lambda)$, entonces
   - $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
   - $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{\lambda}$
   - $Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Definición 5. Dada una v.a. X y $k \in \mathbb{N}$, le llamamos Momento de orden k al valor esperado de X^k

$$\mu_k = \mathbb{E}[X^k]$$

Definición 6. Dada una v.a. X y $t \in \mathbb{R}$, se define la función generadora de momentos de X como

$$M(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Al derivar $M(t)$ se pueden generar todos los momentos de la v.a. X.

Resumen 2

Definición 7 (Vectores Aleatorios)**.** Un vector aleatorio $X = (X_k)_{k=1}^n$ y $x = (x_k)_{k=1}^n \in R^n$ se cumple que la:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n)$$

A F la llamamos función de Distribución de probabilidad de X

Definición 8 (Funciones marginales)**.** Dado un vector aleatorio $X = (X_k)_{k=1}^n$ y $x = (x_k)_{k=1}^n \in R^n$ se define la función de distribución marginal:

$$F_{X_k}(x_k) = \lim_{(x_1,..,x_{k-1},x_{k+1},..,x_n)\to\infty} F_X(x) = P(X_k \leq x_k)$$

A F la llamamos función de Distribución de probabilidad de X

Definición 9. Sea X un vector aleatorio discreto. Se define la función de probabilidad de X, $pX : R^n \to [0,1]$, como:

$$p_X(x) = P(X = x) = P(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)$$

Por ejemplo caso $k = 3$: $X = (X_1, X_2, X_3)$ y $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2,x_3 \in R} P_X(x)$

Definición 10. Sea X un vector aleatorio continuo. Se define:

$$P(X \in B) \int_B f_X(x)dx$$

Obs: A esta función $f_X(x)$ se le conoce como densidad conjunta y note que esta integral suele ser una integral en más de una dimensión.
Por ejemplo: Sea $B = R_+^2$ (El primer cuadrante) y sea $f_X(x) = \frac{1_{\{x^2+y^2\leq 1\}}(x,y)}{\pi}$, se tiene que:

$$P(X \in B) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_X(x)dxdy = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi} r d\theta dr = \frac{1}{4}$$

Las funciones de densidad marginal se definen de manera análoga, sea $X = (X_1, X_2, X_3)$.

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_X(x_1, x_2, x_3)dx_2dx_3$$

Propiedades 2. $\frac{\partial^n F_X(x)}{\partial x_1 ... \partial x_n} = f_X(x)$

Obs: Si las componentes de un vector aleatorio, son variables independientes:

$$F_X(x) = \prod_{i=1}^n F_{Xi}(x_i)$$

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^n f_{Xi}(x_i)$$

$$\frac{\partial^n F_X(x)}{\partial x_1 ... \partial x_n} = \prod_{i=1}^n \frac{\partial F_{Xi}(x_i)}{\partial x_i} = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) = f_X(x)$$