MA3403-4. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 29 de octubre de 2021

Auxiliar 9: Variables Aleatorias Continuas e Inicio de Vectores aleatorios

P1. En Economía se duce que un agente, con función de utilidad U, frente a una v.a X es:
Averso al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) > \mathbb{E}(U(X))$
Favorable al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) < \mathbb{E}(U(X))$
Neutro al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(U(X))$
Si $X \sim Unif(0,1)$ indique el tipo de agente si:

a) $U(t) = t^2$

b) $U(t) = ln(t)$

c) $U(t) = a + bt$

P2. Un auxiliar de MA3403, les pide a sus alumnos dibujar un octavo de circunferencia, posteriormente que escojan algún ángulo θ que este comprendido por este. El punto Y está determinado por la proyección en el eje Y de la intersección entre la recta que pasa por el origen, con pendiente $\tan(\theta)$ y la recta $x = 1$, a partir de la experiencia el ángulo parece estar distribuido uniformemente entre 0 y $\frac{\pi}{4}$. Determine la función de densidad de Y, y calcule la esperanza.

Obs: para el caso en se dibuja un cuarto de circunferencia no existe esperanza

Hint: Pruebe que si X, Y son dos v.a. tal que $g(X) = Y$ con g función real invertible y creciente, entonces $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1}(y))'$.

P3. Sea (X, Y) vector aleatorio con densidad:

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)} 1_{\{x>0,y>0\}}$$

Calcule las densidades marginales, $P(X \geq Y \geq 2)$ y $P(2 - Y \geq X \geq Y)$ y $E(X)$ ¿Que se puede decir acerca de la dependencia entre X e Y.

P4. Una persona dispara con arco y flecha a un blanco. Si la flecha llega a menos de 5cm del centro, se asignan 10 puntos; si está a más de 5cm y a menos de 15cm, se le asignan 5 puntos; y si está a más de 15cm y menos de 25cm, se le asignan 3 puntos. En otro caso, no se asignan puntos. Calcule la cantidad esperada de puntos que obtiene la persona, si se sabe que la distancia de la flecha al centro del blanco se distribuye uniformemente entre 0cm y 50cm.

Propuestos

Prop1. Suponga que tiene una variable aleatoria X uniforme en $[0, 2\pi]$. Calcule entonces la densidad de $|\sin(X)|$

Resumen 1

Definición 1 (V.a. continua)**.** Una v.a. X es continua si exista una función no-negativa definida para todo número real, tal que para todo $B \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

A f la llamamos función de densidad de probabilidad de X

Propiedades 1.

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
2. *Dado* $B = [a,b] \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$
3. *Dado* $a \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X = a) = 0$
4. *Función distribución acumulada, dado* $a \in \mathbb{R}$*,* $F(a) = \mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

Definición 2. Dada X una v.a. continua, se define su **esperanza**, o valor esperado, como

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Definición 3. Dada X una v.a. continua y g una función real, entonces la esperanza de la v.a. $g(X)$ esta dada por

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)fx$$

Definición 4. Dada X v.a., se define su **varianza** como

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

V.a. continuas

1. **Uniforme:** X $U(a,b)$, entonces
   - $f(x) = \dfrac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)$
   - $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$
   - $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
2. **Normal:** X $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces
   - $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
   - $\mathbb{E}[X] = \mu$
   - $Var(X) = \sigma^2$
   - Si X $\mathcal{N}(0,1)$, la llamamos v.a. normal estándar.
3. **Exponencial:** X $exp(\lambda)$, entonces
   - $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
   - $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{\lambda}$
   - $Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Definición 5. Dada una v.a. X y $k \in \mathbb{N}$, le llamamos Momento de orden k al valor esperado de X^k

$$\mu_k = \mathbb{E}[X^k]$$

Definición 6. Dada una v.a. X y $t \in \mathbb{R}$, se define la función generadora de momentos de X como

$$M(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Al derivar $M(t)$ se pueden generar todos los momentos de la v.a. X.

Resumen 2

Definición 7 (Vectores Aleatorios)**.** Un vector aleatorio $X = (X_k)_{k=1}^n$ y $x = (x_k)_{k=1}^n \in R^n$ se cumple que la:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n)$$

A F la llamamos función de Distribución de probabilidad de X

Definición 8 (Funciones marginales)**.** Dado un vector aleatorio $X = (X_k)_{k=1}^n$ y $x = (x_k)_{k=1}^n \in R^n$ se define la función de distribución marginal:

$$F_{X_k}(x_k) = \lim_{(x_1,..,x_{k-1},x_{k+1},..,x_n)\to\infty} F_X(x) = P(X_k \leq x_k)$$

A F la llamamos función de Distribución de probabilidad de X

Definición 9. Sea X un vector aleatorio discreto. Se define la función de probabilidad de X, $pX : R^n \to [0,1]$, como:

$$p_X(x) = P(X = x) = P(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)$$

Por ejemplo caso $k = 3$: $X = (X_1, X_2, X_3)$ y $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2,x_3 \in R} P_X(x)$

Definición 10. Sea X un vector aleatorio continuo. Se define:

$$P(X \in B) \int_B f_X(x)dx$$

Obs: A esta función $f_X(x)$ se le conoce como densidad conjunta y note que esta integral suele ser una integral en más de una dimensión.
Por ejemplo: Sea $B = R_+^2$ (El primer cuadrante) y sea $f_X(x) = \frac{1_{\{x^2+y^2\leq 1\}}(x,y)}{\pi}$, se tiene que:

$$P(X \in B) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_X(x)dxdy = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi} r d\theta dr = \frac{1}{4}$$

Las funciones de densidad marginal se definen de manera análoga, sea $X = (X_1, X_2, X_3)$.

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_X(x_1, x_2, x_3)dx_2dx_3$$

Propiedades 2. $\frac{\partial^n F_X(x)}{\partial x_1 ... \partial x_n} = f_X(x)$

Obs: Si las componentes de un vector aleatorio, son variables independientes:

$$F_X(x) = \prod_{i=1}^n F_{Xi}(x_i)$$

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^n f_{Xi}(x_i)$$

$$\frac{\partial^n F_X(x)}{\partial x_1 ... \partial x_n} = \prod_{i=1}^n \frac{\partial F_{Xi}(x_i)}{\partial x_i} = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) = f_X(x)$$