

MA3403-4. Probabilidades y Estadística**Profesor:** Raúl Gouet**Auxiliares:** Vicente Salinas**Fecha:** 22 de octubre de 2021**Auxiliar 8: Variables Aleatorias Continuas**

P1. Decimos que una variable aleatoria X tiene una distribución de Laplace de parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $b > 0$ si su densidad está dada por: $f_X(x) = Ce^{-\frac{|x-\mu|}{b}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

- Calcule el valor de C .
- Supongamos $\mu = 0$, ¿Qué variable conocida es $|X|$?
- Calcule $E(X)$.
- Calcule $Var(X)$.

P2. Sea Y una v.a. tal que $Y \sim U(0, 5)$, ¿Cuál es la probabilidad de que las soluciones a la ecuación $4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$ sean ambas reales?

P3. Se ha observado que el volumen por hora de agua radiactiva que expulsa una planta nuclear, expresado en m^3 , se puede modelar como una v.a. absolutamente continua (con densidad de probabilidad continua). Su densidad viene dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} Ax & 0 \leq x \leq 1/2 \\ B(1-x) & 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{cualquier otro } x \end{cases}$$

- Determine la condición que deben satisfacer los parámetros $A, B > 0$ para que f_X sea una función de densidad.
- Obtenga la función de distribución F_X .
- Use la función de distribución F_X para calcular la probabilidad de que el agua expulsada (en m^3) sea (i) más de $1/2$; (ii) menos de $1/2$; (iii) entre $1/4$ y $3/4$.
- Calcule (usando la definición de probabilidad condicional) $\mathbb{P}[X < 0,2 | x \leq 1/2]$ y $\mathbb{P}\left[X > \frac{1}{2} \mid \frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\right]$
- Calcule $\mathbb{E}[X]$ y $Var[X]$.

P4. En Economía se dice que un agente, con función de utilidad U , frente a una v.a X es:

Averso al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) > \mathbb{E}(U(X))$

Favorable al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) < \mathbb{E}(U(X))$

Neutro al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(U(X))$

Si $X \sim Unif(0, 1)$ indique el tipo de agente si:

- $U(t) = t^2$
- $U(t) = \ln(t)$
- $U(t) = a + bt$

Propuestos

Prop1. Sea $\lambda > 0$ real. Considere la variable aleatoria continua X cuya densidad f_X satisfice:

$$f_X(u) = \frac{1}{2} \lambda e^{\lambda|u|} \text{ para } u \in \mathbb{R}.$$

(conocida como doble exponencial de parámetro λ).

- Pruebe que $\mathbb{E}(X) = 0$
- Pruebe que $|X| \sim \text{Exponencial}(\lambda)$

c) Sea $Y = \text{signo}(X)$. Pruebe que $Y \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{2}\right)$

Handwritten notes:

$$P(Y=1) = \frac{1}{2}$$

$$P(Y=-1) = \frac{1}{2}$$

$$X=5 \Rightarrow \text{signo}(X)=1$$

$$X=-5 \Rightarrow \text{signo}(X)=-1$$

Definición 1 (V.a. continua). Una v.a. X es continua si existe una función no-negativa definida para todo número real, tal que para todo $B \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x) dx \approx \mathbb{P}(X \in [a, b])$$

A f la llamamos función de densidad de probabilidad de X

Propiedades 1. 1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ ←

2. Dado $B = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = \mathbb{P}(a \leq X < b)$

3. Dado $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = a) = 0$ ←

4. Función distribución acumulada, dado $a \in \mathbb{R}$, $F(a) = \mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$

Definición 2. Dada X una v.a. continua, se define su **esperanza**, o valor esperado, como

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Definición 3. Dada X una v.a. continua y g una función real, entonces la esperanza de la v.a. $g(X)$ esta dada por

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

Definición 4. Dada X v.a., se define su **varianza** como

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

V.a. continuas

1. **Uniforme:** $X \sim U(a, b)$, entonces

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a, b]}(x)$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2} = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2. **Normal:** $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \rightarrow$$

$$\mathbb{E}[X] = \mu$$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, la llamamos v.a. normal estándar.

3. **Exponencial:** $X \sim \text{exp}(\lambda)$, entonces

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x)$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} x f(x) dx$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Definición 5. Dada una v.a. X y $k \in \mathbb{N}$, le llamamos **Momento de orden k** al valor esperado de X^k

$$\mu_k = \mathbb{E}[X^k]$$

Definición 6. Dada una v.a. X y $t \in \mathbb{R}$, se define la función generadora de momentos de X como

$$M(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Al derivar $M(t)$ se pueden generar todos los momentos de la v.a. X .

~~$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$~~

$$F(t) = P(X \leq t) = \sum_{i=0}^t P(X=i)$$

$$E(X) = \sum_{k \in \mathbb{R}_+} k P(X=k)$$

$$P(X \in [a, b]) = \sum_{k=a}^b P(X=k)$$

$$X \text{ continuo} \Rightarrow P(X=k) = 0$$

P1. Decimos que una variable aleatoria X tiene una distribución de Laplace de parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $b > 0$ si su densidad está dada por: $f_X(x) = C e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

- Calcule el valor de C .
- Supongamos $\mu = 0$, ¿Qué variable conocida es $|X|$?
- Calcule $E(X)$.
- Calcule $Var(X)$.

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} C e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} dx = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} dx$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-A}^A g(x) dx = 2 \int_0^A g(x) dx \\
 & \quad \uparrow \\
 & \quad g(x) = g(-x) \\
 & \quad \text{PAR}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & y = x - \mu \\
 & dy = dx \\
 & = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|y|}{b}} dy \\
 & = 2C \int_0^{\infty} e^{-\frac{|y|}{b}} dy \\
 & = 2C \int_0^{\infty} e^{-\frac{y}{b}} dy \\
 & = 2Cb \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{1}{b} e^{-\frac{1}{b}y} dy}_1 \\
 & = 2Cb
 \end{aligned}$$

Integral densidad $\exp(-\frac{1}{b})$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{2b}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}$$

$$P(X \leq t) = F_X(t) = P(X \in (-\infty, t]) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} dx$$

b) No gaussian convex $f_{|X|}(x)$

$$f_{|X|} = \frac{1}{4-2} \mathbb{1}_{[2, 4]}(x)$$

$$\Rightarrow |X| \sim \text{Uniforme } [2, 4]$$

$$f_{|X|} = 1 e^{-x \cdot 1}$$

$$|X| \sim \exp(1)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^x f_X(t) dt = F_X(x)} \quad \text{TFC}$$

$$f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x)$$

Solo per valori si $t \geq 0$

$$F_{|x|}(t) = P(|x| \leq t) \quad t \text{ posit.}$$

$$= P(-t \leq x \leq t)$$

$$= \int_{-t}^t \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x|}{b}} dx \quad (P \text{ o } P_{\text{abs}})$$

$$= \int_0^t \frac{1}{b} e^{-\frac{x}{b}} dx$$

$$= \left(-e^{-\frac{x}{b}} \right) \Big|_0^t$$

$$F_{|x|}(t) = -e^{-\frac{t}{b}} + 1$$

$$f_{|x|}(t) = \frac{1}{b} e^{-t \cdot \frac{1}{b}} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(t)$$

$$|x| \sim \exp\left(\frac{1}{b}\right)$$

$$c) E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma^6} e^{-\frac{|x-\mu|}{\sigma}} dx \quad \begin{matrix} y = x - \mu \\ dy = dx \end{matrix}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\overbrace{y+\mu}^{\rightarrow}) \frac{1}{\sigma^6} e^{-\frac{|y|}{\sigma}} dy$$

Terminarlo, (Recordar ver paréntidos)
separar las 2 integrales

$$d) Var(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

↙ ✓
parte c)

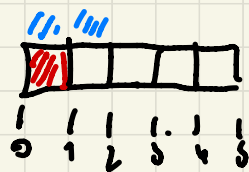
$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{x^2}^{\uparrow} \frac{1}{\sigma^6} e^{-\frac{|x-\mu|}{\sigma}} dx$$

esq
Abuso $\rightarrow (y+\mu)^2$

$$\begin{matrix} x - \mu = y \\ dx = dy \end{matrix}$$

P2. Sea Y una v.a. tal que $Y \sim U(0, 5)$, ¿Cuál es la probabilidad de que las soluciones a la ecuación $4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$ sean ambas reales?

$$f_Y = \frac{1}{5} \cdot \mathbb{1}_{[0,5]}(x)$$



$$P(Y \in [0, 1]) = \frac{1}{5} \quad \text{+} \quad \text{graph of } f_Y(x)$$

$$P(Y \in [0, 2]) = \frac{2}{5} \quad ,$$

$$P(Y \in [1.23, 2]) = \frac{0.77}{5}$$

$$\begin{aligned} P(Y \in [0, 2]) &= \int_0^2 \overbrace{\frac{1}{5} \mathbb{1}_{[0,5]}(x)}^{f_Y(x)} dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{5} dx \quad \left. \frac{x}{5} \right|_0^2 = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y \in [-1, 2]) &= P(Y \in [-1, 0]) + P(Y \in [0, 2]) \\ &= \int_{-1}^0 \cancel{\frac{1}{5} \mathbb{1}_{[0,5]}(x)} dx + \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^3 \mathbb{1}_{[0,5]}(x) dx = \int_{-1}^0 0 dx + \int_0^3 1 dx$$

$$\int_0^5 \mathbb{1}_{[0,5]}(x) dx = \int_0^5 1 dx$$

$$\int_0^5 |x| dx = \int_0^5 x dx$$

$$4x^2 + 4yx + (y+2) = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$b^2 - 4ac \geq 0 \Leftrightarrow \text{Solutions Reals}$$

$$P(\text{Sens. Analysis, sensib.}) = P(b^2 - 4ac \geq 0)$$

$$b^2 - 4ac \geq 0 \Leftrightarrow 16y^2 - 16y - 32 \geq 0$$

$$\Rightarrow P(16y^2 - 16y - 32 \geq 0)$$

$$= P(\underline{y^2 - y - 2 \geq 0})$$

$$= P((y+1)(y-2) \geq 0)$$

$$= P((y \geq 2) \cup (y \leq -1))$$

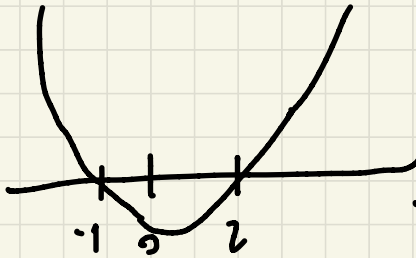
$$= P(y \geq 2) + P(y \leq -1)$$

$$\underbrace{y \in [0, 5]}$$

$P_{\text{res}} \text{ von } [0, 5] = P$
 $P(Y \in A) = P$

$$= P(2 \leq y \leq 5)$$

$$= \int_2^5 \frac{1}{5} dx = \left. \frac{x}{5} \right|_2^5 = \boxed{\frac{3}{5}}$$



P3. Se ha observado que el volumen por hora de agua radiactiva que expulsa una planta nuclear, expresado en m^3 , se puede modelar como una v.a. absolutamente continua (con densidad de probabilidad continua). Su densidad viene dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} Ax & 0 \leq x \leq 1/2 \\ B(1-x) & 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{cualquier otro } x \end{cases}$$

- Determine la condición que deben satisfacer los parámetros $A, B > 0$ para que f_X sea una función de densidad.
- Obtenga la función de distribución F_X .
- Use la función de distribución F_X para calcular la probabilidad de que el agua expulsada (en m^3) sea (i) más de $1/2$; (ii) menos de $1/2$; (iii) entre $1/4$ y $3/4$.
- Calcule (usando la definición de probabilidad condicional) $\mathbb{P}[X < 0,2 | x \leq 1/2]$ y $\mathbb{P}\left[X > \frac{1}{2} | \frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\right]$
- Calcule $\mathbb{E}[X]$ y $\text{Var}[X]$.

$$a) f_x(0^-) = 0$$

$$f_x(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0} Ax = 0$$

$$f_x(1^-) = 0$$

$$f_x(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1} B(1-x) = 0$$

$$f_x\left(\frac{1}{2}^-\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} Ax = \frac{A}{2}$$

$$f_x\left(\frac{1}{2}^+\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} B(1-x) = \frac{B}{2}$$

$P_{AC} \Rightarrow$ $\boxed{A = B}$

$$f(x) = \begin{cases} Ax & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ A(1-x) & x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0 & \sim \end{cases}$$

3. $\hookrightarrow 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

$$1 = \int_0^{\frac{1}{2}} Ax dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 A(1-x) dx$$

$$\frac{1}{A} = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{\frac{1}{2}} + \left. x - \frac{x^2}{2} \right|_{\frac{1}{2}}^1$$

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{8} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{A = 4}$$

$$b) f_x(x) = \begin{cases} 4x & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ (1-x)4 & x \in]\frac{1}{2}, 1] \\ 0 & \text{~} \end{cases}$$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 2x^2 & 0 < x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(x) dx$$

$$\boxed{x \in [0, \frac{1}{2}]} = \int_0^x 4x dx$$

$$= 2x^2 \Big|_0^x = 2x^2$$

$$X \in \Gamma_{\frac{1}{2}, 1}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\frac{1}{2}} 4x dx + \int_{\frac{1}{2}}^x 4(1-x) dx$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^x 4(1-x) dx$$

$$= \frac{1}{2} + 4 \left[x - \frac{x^2}{2} \right] \Big|_{\frac{1}{2}}^x$$

$$= \frac{1}{2} + 4 \left[x - \frac{x^2}{2} \right] - 4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{8}$$

$$= -2 + 1 + 4x - 2x^2$$

$$= -1 + 4x - 2x^2$$

$E \sim$ radiale

$$\boxed{x=1} \Rightarrow = -1 + 4 - 2 = 1$$

$$F(x) =$$



$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 2x^2 \\ -1 + 4x - 2x^2 \\ 1 \end{array} \right.$$

Si $x \leq 0$

Si $x \in]0, 1]$

Si $x \in]1, 1]$

Si $x > 1$

$$\begin{aligned}
 9) P(X \geq \frac{1}{2}) &= 1 - P(X < \frac{1}{2}) \\
 &= 1 - \underbrace{F_X(\frac{1}{2})}_{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$P(X < \frac{1}{2}) = F_X(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 P(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}) &= F_X(\frac{3}{4}) - F_X(\frac{1}{4}) \\
 &= -1 + 3 - 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 \\
 &= 2 - 9 \cdot 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 \\
 &= 2 - 10 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2
 \end{aligned}$$

$$= 2 - \frac{20}{16} = \frac{12}{16} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

$$\mathbb{P}[X < 0.2 | x \leq 1/2] \text{ y } \mathbb{P}\left[X > \frac{1}{2} | \frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\right]$$

$$X < 0.2 \cap X \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{d) } \frac{\mathbb{P}(X < 0.2 | X \leq \frac{1}{2})}{\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2})} = \frac{\mathbb{P}(X < 0.2)}{\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2})}$$

$$= \frac{F(0.2)}{F(\frac{1}{2})} = \frac{2 \cdot (0.2)^2}{\frac{1}{2}}$$

$$= 4 \cdot (0.04) = \boxed{0.16}$$

$$\frac{\mathbb{P}(X > \frac{1}{2} | \frac{1}{4} < X < \frac{3}{4})}{\mathbb{P}(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4})} = \frac{\mathbb{P}(X \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}])}{\mathbb{P}(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4})}$$

$$= \frac{F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{-1 + 3 - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{3}{2} \left(1 - \frac{3}{4}\right)}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot 4x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x \cdot 4(1-x) dx$$

$$= \left. \frac{4}{3} x^3 \right|_0^{\frac{1}{2}} + \left. 2x^2 \right|_{\frac{1}{2}}^1 - \left. \frac{4x^3}{3} \right|_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^3 - 0 + 2 - \frac{4}{3} - \underbrace{2 \left(\frac{1}{2} \right)^2}_{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^3}$$

$$= 2 - \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

$$E(x) = \frac{1}{6}$$

$$Var(x) = E(x^2) - \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$E(x^2) = \int_0^{\frac{1}{2}} 4x^3 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 4x^2 - 4x^3 dx$$

$$= x^4 \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3} x^3 \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - x^4 \Big|_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - 4 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}^2$$

$$\text{Var}(X) = \boxed{\frac{5}{36}}$$

P4. En Economía se dice que un agente, con función de utilidad U , frente a una v.a X es:

Averso al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) > \mathbb{E}(U(X))$

Favorable al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) < \mathbb{E}(U(X))$

Neutro al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(U(X))$

Si $X \sim Unif(0, 1)$ indique el tipo de agente si:

a) $U(t) = t^2$

b) $U(t) = \ln(t)$

c) $U(t) = a + bt$

Aux 9

Prop1. Sea $\lambda > 0$ real. Considere la variable aleatoria continua X cuya densidad f_X satisfice:

$$f_X(u) = \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda|u|} \text{ para } u \in \mathbb{R}.$$

(conocida como doble exponencial de parámetro λ).

a) Pruebe que $\mathbb{E}(X) = 0$

b) Pruebe que $|X| \sim \text{Exponencial}(\lambda)$

c) Sea $Y = \text{signo}(X)$. Pruebe que $Y \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned} P(Y=1) &= \frac{1}{2} \\ P(Y=-1) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} u \underbrace{\frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda|u|}}_{\substack{\text{Si } f_{\text{función}} \\ \text{impar } f}} du \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\int_{-A}^A f(u) du = 0$

$$|X| \sim \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow f_{|X|}(u) = \lambda e^{-\lambda u} \quad \text{para } u \geq 0$$

$$\text{b) } \underline{P(|X| \leq t)} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ P(-t \leq X \leq t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$P(-t \leq x \leq t) = \int_{-t}^t \lambda \frac{1}{2} e^{-\lambda|u|} du$$

$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda u} du \quad \text{par}$$

$$= (e^{-\lambda u}) \Big|_0^t$$

$$= 1 - e^{-\lambda t}$$

$$F_{|X|}(t) = P(|X| \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$f_{|X|}(t) = \frac{d}{dt} F_{|X|}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$f_{|X|}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(t)$$

$$\Leftrightarrow |X| \sim \exp(\lambda)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda |u|}}_{\text{densité}} du = 1$$

Parité

$$\Rightarrow 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda |u|} du = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda |u|} du = \frac{1}{2}$$

$$\stackrel{1-\text{eso}}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda |u|} du = \frac{1}{2}$$

$$\frac{P(X)}{P}(\text{Sign}(X) = 1) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow P(X > 0) = \frac{1}{2}$$

$$P(X > 0) = \int_0^{\infty} \lambda \frac{1}{2} e^{-\lambda |u|} du = \frac{1}{2}$$

$$P(X < 0) = \int_{-\infty}^0 \lambda \frac{1}{2} e^{-\lambda |u|} du = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(\text{Sig}(X) = 1) = P(\text{Sig}(X) = -1) = \frac{1}{2}$$