MA3403-4. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 15 de octubre de 2021

Auxiliar 7: Más Variables Aleatorias

Definición 1 (Bernoulli)**.** Experimento tiene sólo dos posibles resultados: Éxito con prob. $p \in [0,1]$ y falla con prob. $1-p$.

Definición 2 (Binomial)**.** Una v.a. binomial cuenta la cantidad de éxitos en n experimentos independientes, cada uno con prob. de éxito $p \in [0,1]$ y $1-p$ de fallar.

- $R_X = \{0, 1, ..., n\}$
- $\boxed{\mathbb{E}[X] = np}$
- $Var[X] = np(1-p)$

Definición 3 (Geométrica)**.** Se realizan experimentos independientes consecutivos, cada uno con prob. de éxito p y de falla $1-p$. Una *v.a.* geométrica representa el número del experimento donde se obtuvo el primer éxito.

- $R_X = \{1, 2, ...\} = \mathbb{N}$
- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1-p}{p}$
- $Var[X] = \dfrac{1-p}{p^2}$

Probabilidades de variables aleatorias discretas.
Bernoulli $Bern(p)$
$P(X=1) = p$ y $P(X=0) = 1-p$
Binomial $Bin(n,p)$, para $k \in \{0, ..., n\}$
$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Geométrica $Geo(p)$, para $k \in \{1, 2, ...\}$
$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$
Poisson $Pois(\lambda)$, para $k \in \{0, 1, ...\}$
$P(X=k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

Definición 4. Dada una v.a. X y $k \in \mathbb{N}$, le llamamos Momento de orden k al valor esperado de X^k

$$\mu_k = \mathbb{E}[X^k]$$

Definición 5. Dada una v.a. X y $t \in \mathbb{R}$, se define la función generadora de momentos de X como

$$M(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Al derivar $M(t)$ se pueden generar todos los momentos de la v.a. X.

P1. Consideremos dos variables aleatorias $X \sim$ Binomial(r,p), $Y \sim$ Binomial(s,p). Supongamos que X,Y son independientes y definamos $Z = X + Y$. Demuestre que $Z \sim$Binomial$(s+r,p)$. **Indicación:** Puede utilizar que $\sum_{i \geq 0} \binom{n}{i}\binom{m}{a-i} = \binom{n+m}{a}$

$\uparrow$
n+m
escojo a

P2. Sea X variable aleatoria tomando valores en N. Demuestre que:

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$$

P3. Un cultivo de bacterias de un cierto tipo puede proliferar o bien extinguirse, lo que ocurre con probabilidad p y probabilidad $1-p$, respectivamente. Para realizar un estudio, usted genera n de estos cultivos de manera independiente.

a) Indique la función p_X de la variable X correspondiente al número de cultivos que proliferan.

b) Debido a un corte de luz, el sistema de refrigeración de los cultivos deja de funcionar por unas horas, lo cual significa que cada cultivo que prolifero inicialmente se mantendrá vivo o se extinguirá con probabilidad q y $1-q$ respectivamente, independiente del resto. ¿Cual es la distribución de la variable aleatoria Y correspondiente a los cultivos que quedan vivos?

P4. Durante la cuarentena, para despejarse un poco, a cierta hora del día usted se queda mirando por la ventana. Tras varios días se da cuenta que por el techo de la casa vecina transitan muchos gatos. Como usted es bastante supersticioso, no le gusta observar gatos negros pasar porque le dan mala suerte.

a) Después de un tiempo mirando, calcula que existe una probabilidad p de que aparezca uno. Cierto día, se para tras la ventana y se pregunta, ¿Cuál será la probabilidad de que los primeros 5 gatos que vea no sean negros?

b) Un día, le pierde el miedo a los gatos negros. Pero su superstición es tan fuerte que debe evitar a toda costa ver 3 gatos negros diarios, si no tendrá demasiados años de mala suerte. ¿Cuál es la probabilidad de que pasen 20 gatos antes de que vea 3 gatos negros?

c) Si usted ve n gatos al día, calcule el número esperado de gatos negros vistos al día, en función de n y p.

Propuestos

Prop1. Un grupo de m personas simultáneamente entra a un ascensor en el piso más bajo (nivel 0) Cada persona aleatoriamente escoge uno de los r pisos $1, 2, 3, ..., r$ para bajarse, donde cada elección de las personas son independientes unas de otras. El elevador solo para en un piso si al menos una persona quiere bajarse ahí. Si ninguna otra persona entra al ascensor en los pisos $1, ..., r$. ¿Cual es el valor esperado de cantidad de paradas que hará el ascensor?

P1. Consideremos dos variables aleatorias $X \sim$ Binomial(r, p), $Y \sim$ Binomial(s, p). Supongamos que X, Y son independientes y definamos $Z = X + Y$. Demuestre que $Z \sim$Binomial$(s + r, p)$. **Indicación:** Puede utilizar que $\sum_{i \geq 0} \binom{n}{i}\binom{m}{a-i} = \binom{n+m}{a}$

p Éxito

$$P_X(k) = P(X = k) = \binom{r}{k} p^k (1-p)^{r-k}$$

$k \in \{0, \dots, r\}$

Éxitos

Fracaso

E E F F F F

E F F E F

F F E

$$P_Y(k) = P(Y = k) = \binom{s}{k} p^k (1-p)^{s-k}$$

$\in \{0, \dots, s\}$

$$\Rightarrow P(X = k_1, Y = k_2) = P(X = k_1) P(Y = k_2)$$

Queremos Demostrar

$$\boxed{P(Z = k) = \binom{s+r}{k} p^k (1-p)^{s+r-k}}$$

$$P(Z=k) = P(X+Y=k)$$

$\in \{n, \ldots, r+n\}$

$\in \{0, \ldots, r+s\}$

Prob totales

$$= \sum_{n=0}^{s} P(X+Y=k \mid Y=n)\, P(Y=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{s} P(\underbrace{X=k-n}_{\text{No depende de } Y} \mid Y=n)\, P(Y=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{s} P(X=k-n)\, P(Y=n)$$

Si: $k<n$ o $k>r+n$ $\quad P(X=k-n)=0$

$$= \sum_{n=0}^{s} \underbrace{\binom{r}{k-n} p^{k-n} (1-p)^{r-(k-n)}}_{P(X=k-n)} \underbrace{\binom{s}{n} p^{n} (1-p)^{s-n}}_{P(Y=n)}$$

$$= p^{k}(1-p)^{r+s-k} \underbrace{\sum_{n=0}^{s} \binom{r}{k-n}\binom{s}{n}}_{\binom{r+s}{k}} \quad \underline{\text{ind}}$$

$$= \binom{r+s}{k} p^{k} (1-p)^{r+s-k}$$

$$Z \sim \mathrm{Bin}(r+s, p)$$

P2. Sea X variable aleatoria tomando valores en N. Demuestre que:

$R_X \subset \mathbb{N}$

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(X=k) \quad \left(k \notin R_X \Rightarrow P(X=k)=0 \right)$$

$$= \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} k P(X=k)}$$

$k=\infty \Rightarrow$ No suma

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} P(X=k)$$

$$\sum_{j=1}^{6} 5 = 6 \cdot 5$$

$\longrightarrow$

$K=1$	$P(X=1)$				
$K=2$	$P(X=2)$	$P(X=2)$			
$K=3$	$P(X=3)$	$P(X=3)$	$P(X=3)$		
$K=4$	$P(X=4)$	$P(X=4)$	$P(X=4)$	$P(X=4)$	
$\vdots$					
$K=n$	$P(X=n)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$P(X=n)$
$\vdots$					
$K=\infty$					

Coluna 1

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X=i)$$

Coluna 2

$$\sum_{i=2}^{\infty} P(X=i)$$

Como sumo todas las columnas

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=l}^{\infty} P(X=i)$$

$\Rightarrow$

$$E(X) = \sum_{l=1}^{\infty} \left[\sum_{i=l}^{\infty} P(X=i) \right]$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \Big[\underbrace{P(X=l) + P(X=l+1) + \dots + P(X=\infty)}_{\text{Disjuntos}} \Big]$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} P(X \geq l)$$

P3. Un cultivo de bacterias de un cierto tipo puede proliferar o bien extinguirse, lo que ocurre con probabilidad p y probabilidad $1 - p$, respectivamente. Para realizar un estudio, usted genera n de estos cultivos de manera independiente.

a) Indique la función p_X de la variable X correspondiente al número de cultivos que proliferan.

b) Debido a un corte de luz, el sistema de refrigeración de los cultivos deja de funcionar por unas horas, lo cual significa que cada cultivo que prolifero inicialmente se mantendrá vivo o se extinguirá con probabilidad q y $1 - q$ respectivamente, independiente del resto. ¿Cual es la distribución de la variable aleatoria Y correspondiente a los cultivos que quedan vivos?

a) X: N° de cultivos que proliferan

Notemos que $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$

donde cada $X_i \sim Ber(p)$ son independientes

$\Rightarrow X \sim Bin(N, p)$

$\Rightarrow P(X = k) = \binom{N}{k} \cdot p^{k} \cdot (1-p)^{(N-k)}$

<u>opción alternativa</u>

$P(X=k) = P($"Tengo k exitos entre N intentos"$)$

$$\approx \; p^K \; (1-p)^{N-K}$$

Faltan ordenes ↑ Exitos ↑ Fracasos ↑

(Si hubieran mas o menos no sumarian N o no serian K exitos)

⇓ pues $\underbrace{EE \quad\quad}_{K\text{-veces}} \; \underbrace{(FF \quad\quad)}_{N-K \text{ veces}}$

o $EFEE\ldots$

Muchas opciones

¿Como las contamos?

Hay K E's y $N-K$ F's

$\Rightarrow$ Escoger las K posiciones de las E's entre N opciones $\Rightarrow \binom{N}{K}$

$$\boxed{P(X=k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}}$$

b) Ejemplo si sobreviven 3 en la primer

$\Rightarrow P(Y=1 \mid X=3) = \binom{3}{1} q^1 \cdot (1-q)^2$

$\boxed{k > j}$

$$P(Y=j \mid X=k) = \binom{k}{j} q^j (1-q)^{k-j}$$

$$P(Y=j) = \sum_{k=0}^{N} P(Y=j \mid X=k) P(X=k)$$

Todas

$$= \sum_{k=j}^{N} P(Y=j \mid X=k) P(X=k)$$

$$= \sum_{k=j}^{N} \binom{k}{j} q^j (1-q)^{k-j} \cdot \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$= \sum_{k=j}^{N} q^j (1-q)^{k-j} p^k (1-p)^{N-k} \frac{\cancel{k!}}{j!\,(k-j)!} \frac{N!}{(N-k)!\,\cancel{k!}}$$

$$= \frac{N!}{j!\,(N-j)!} \cdot \sum_{k=j}^{N} q^j (1-q)^{k-j} p^k (1-p)^{N-k} \frac{(N-j)!}{(k-j)!\,(N-k)!}$$

$$= \binom{N}{j} \sum_{k=0}^{N-j} q^j (1-q)^k p^{k+j} (1-p)^{N-j-k} \binom{N-j}{k}$$

$$= \binom{N}{j} (pq)^j \sum_{k=0}^{N-j} \binom{N-j}{k} \big((1-q)p\big)^k (1-p)^{N-j-k}$$

$$= \binom{N}{j} (pq)^j \left[(1-q)p + (1-p)\right]^{N-j}$$

$$= \binom{n}{j} (pq)^{j} \left[1 - pq \right]^{n-j}$$

$$\sim \quad \mathrm{Bin}(n, pq)$$

P4. Durante la cuarentena, para despejarse un poco, a cierta hora del día usted se queda mirando por la ventana. Tras varios días se da cuenta que por el techo de la casa vecina transitan muchos gatos. Como usted es bastante supersticioso, no le gusta observar gatos negros pasar porque le dan mala suerte.

a) Después de un tiempo mirando, calcula que existe una probabilidad p de que aparezca uno. Cierto día, se para tras la ventana y se pregunta, ¿Cuál será la probabilidad de que los primeros 5 gatos que vea no sean negros?

b) Un día, le pierde el miedo a los gatos negros. Pero su superstición es tan fuerte que debe evitar a toda costa ver 3 gatos negros diarios, si no tendrá demasiados años de mala suerte. ¿Cuál es la probabilidad de que pasen $\boxed{\text{20 gatos}}$ antes de que vea 3 gatos negros? Menos de 3 gatos negros

c) Si usted ve n gatos al día, calcule el número esperado de gatos negros vistos al día, en función de n y p.

Propuestos

$P(\text{Aparecer gato negro i-ésimo}) = p \to$ Exitos

$P(\text{Aparezca gato no negro i-ésimo}) = 1-p \to$ Fracasos

5 gatos (N° total de experimentos)

$Z \sim Bin(5, p)$

$$P(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{0 exitos}}}{Z=0}) = \binom{5}{0} \cdot p^0 (1-p)^{5-0}$$

$P(Z=0) = (1-p)^5$

b) 20 (Nuevo N° Total de experimentos)

<u>Pregunta Aux</u>

De 20 gatos prob que ninguno sea
sea negro

$(1-p)^{20}$

Que <u>exactamente 1 sea negro</u>

$$20 \cdot (1-p)^{19} \, p$$

$$P(Z=1) = \underset{T}{\binom{20}{1}} \underset{\text{Falla } 20-1}{(1-p)^{20-1}} \underset{\text{Acierto } 1}{p^1} \rightsquigarrow Z \sim Bin(20, p)$$

Sea A 1o más 1 negro

$$\Rightarrow P(Z \leq 1) = P(Z=0) + P(Z=1)$$

$$= (1-p)^{20} + \binom{20}{1}(1-p)^{19} p$$

$$= \sum_{K=0}^{1} \binom{20}{K} p^K (1-p)^{N-K}$$

$$P(Z=K) = \binom{20}{K} p^K (1-p)^{20-K}$$

b) $P(Z \leq 2) = P(Z=0) + P(Z=1) + P(Z=2)$

$$\boxed{P(Z \leq 2) = \sum_{K=0}^{2} \binom{20}{K} p^K (1-p)^{N-K}}$$

c) $Z \sim Bin(N, p)$

Total de gatos negros (N) — prob éxito (p)

X: Cantidad vista

$$E(X) = \sum_{K=0}^{N} K \cdot \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K}$$

$$= \sum_{K=1}^{N} \cancel{K} \frac{N!}{\underbrace{K!}_{\cancel{K}\cdot(K-1)!}\,(N-K)!} p^K (1-p)^{N-K}$$

$$= Np \sum_{K=1}^{N} \frac{(N-1)!}{(K-1)!\,(N-K)!} p^{K-1} (1-p)^{N-K}$$

$$= Np \sum_{K=1}^{N} \binom{N-1}{K-1} p^{K-1} (1-p)^{N-K}$$

$$= Np \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} p^{k} (1-p)^{(N-1)-k}}_{\underbrace{\left(p+(1-p)\right)^{N-1}}_{\underbrace{1^{N-1}}_{1}}}$$

$$=$$

$$= \boxed{Np}$$

$$p = \frac{1}{2} \Rightarrow E(x) = \frac{N}{2}$$

Prop1. Un grupo de m personas simultáneamente entra a un ascensor en el piso más bajo (nivel 0) Cada persona aleatoriamente escoge uno de los r pisos $1, 2, 3, ..., r$ para bajarse, donde cada elección de las personas son independientes unas de otras. El elevador solo para en un piso si al menos una persona quiere bajarse ahí. Si ninguna otra persona entra al ascensor en los pisos $1, ..., r$. ¿Cual es el valor esperado de cantidad de paradas que hará el ascensor?

X : En cuantos pisos para

$$X = \sum_{i=1}^{r} X_i$$

X_i : Parar en el piso i

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si para} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{r} E(X_i)$$

$$P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0)$$

$$= 1 - P(X_i^1 = 0, X_i^2 = 0, \dots, X_i^m = 0)$$

$$\text{Ind} \rightarrow = 1 - \prod_{j=1}^{m} P(X_i^j = 0)$$

$$= 1 - P(X_i^1 = 0)^m$$

$$= 1 - \left(\frac{r-1}{r}\right)^m$$

$$E(X_i) = 1 \cdot P(X_i = 1) + 0 \cdot P(X_i = 0)$$

$$= 1 - \left(\frac{r-1}{r}\right)^m$$

$$\Rightarrow E(X) = \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \left(\frac{r-1}{r}\right)^m\right)$$

$$= \boxed{\frac{r^m - (r-1)^m}{r^{m-1}}}$$

$\boxed{\text{Ideas}}$

$m \to \infty$

$$= r - \left(\frac{r-1}{r}\right)^{m-1}$$

$$= r - 0 = r$$

$\boxed{m=2}$

$$= \frac{r^2 - (r-1)^2}{r}$$

$\boxed{r=2}$

$$= \frac{4-1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$$