MA3403-4. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 22 de octubre de 2021

Auxiliar 8: Variables Aleatorias Continuas

P1. Decimos que una variable aleatoria X tiene una distribución de Laplace de parámetros $\mu \in R$ y $b > 0$ si su densidad está dada por: $f_X(x) = Ce^{-\frac{|x-\mu|}{b}}, \qquad \forall x \in R$

a) Calcule el valor de C.
b) Supongamos $\mu = 0$, ¿Qué variable conocida es $|X|$?
c) Calcule $E(X)$.
d) Calcule $Var(X)$.

P2. Sea Y una v.a. tal que $Y \sim U(0,5)$, ¿Cuál es la probabilidad de que las soluciones a la ecuación $4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$ sean ambas reales?

P3. Se ha observado que el volumen por hora de agua radiactiva que expulsa una planta nuclear, expresado en m^3, se puede modelar como una v.a. absolutamente continua (con densidad de probabilidad continua). Su densidad viene dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} Ax & 0 \leq x \leq 1/2 \\ B(1-x) & 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{cualquier otro x} \end{cases}$$

a) Determine la condición que deben satisfacer los parámetros $A, B > 0$ para que f_X sea una función de densidad.
b) Obtenga la función de distribución F_X.
c) Use la función de distribución F_X para calcular la probabilidad de que el agua expulsada (en m^3) sea (i) más de $1/2$; (ii) menos de $1/2$; (iii) entre $1/4$ y $3/4$.
d) Calcule (usando la definición de probabilidad condicional) $\mathbb{P}[X < 0{,}2 | x \leq 1/2]$ y $\mathbb{P}\left[X > \frac{1}{2} | \frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\right]$
e) Calcule $\mathbb{E}[X]$ y $Var[X]$.

P4. En Economía se duce que un agente, con función de utilidad U, frente a una v.a X es:
Averso al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) > \mathbb{E}(U(X))$
Favorable al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) < \mathbb{E}(U(X))$
Neutro al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(U(X))$
Si $X \sim Unif(0,1)$ indique el tipo de agente si:

a) $U(t) = t^2$
b) $U(t) = ln(t)$
c) $U(t) = a + bt$

Propuestos

Prop1. Sea $\lambda > 0$ real. Considere la variable aleatoria continua X cuya densidad f_X satisface:

$$f_X(u) = \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda|u|} \text{para } u \in \mathbb{R}.$$

(conocida como doble exponencial de parámetro λ).

a) Pruebe que $\mathbb{E}(X) = 0$
b) Pruebe que $|X| \sim$ Exponecial(λ)
c) Sea $Y = signo(X)$. Pruebe que $Y \sim$ Bernoulli$\left(\frac{1}{2}\right)$

Definición 1 (V.a. continua)**.** Una v.a. X es continua si exista una función no-negativa definida para todo número real, tal que para todo $B \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

A f la llamamos función de densidad de probabilidad de X

Propiedades 1.
1. *$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$*
2. *Dado $B = [a,b] \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$*
3. *Dado $a \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X = a) = 0$*
4. *Función distribución acumulada, dado $a \in \mathbb{R}$, $F(a) = \mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$*

Definición 2. Dada X una v.a. continua, se define su **esperanza**, o valor esperado, como

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Definición 3. Dada X una v.a. continua y g una función real, entonces la esperanza de la v.a. $g(X)$ esta dada por

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)fx$$

Definición 4. Dada X v.a., se define su **varianza** como

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

V.a. continuas

1. **Uniforme:** X $U(a,b)$, entonces
   - $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$
   - $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$
   - $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
2. **Normal:** X $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces
   - $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
   - $\mathbb{E}[X] = \mu$
   - $Var(X) = \sigma^2$
   - Si X $\mathcal{N}(0,1)$, la llamamos v.a. normal estándar.
3. **Exponencial:** X $exp(\lambda)$, entonces
   - $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
   - $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{\lambda}$
   - $Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Definición 5. Dada una v.a. X y $k \in \mathbb{N}$, le llamamos Momento de orden k al valor esperado de X^k

$$\mu_k = \mathbb{E}[X^k]$$

Definición 6. Dada una v.a. X y $t \in \mathbb{R}$, se define la función generadora de momentos de X como

$$M(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Al derivar $M(t)$ se pueden generar todos los momentos de la v.a. X.