MA3403-4. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 8 de octubre de 2021

$E(X) = \sum_{k \in R_X} P(X=k) \cdot k$

Auxiliar 6: Variables Aleatorias

Definición 1 (Bernoulli)**.** Experimento tiene sólo dos posibles resultados: Éxito con prob. $p \in [0,1]$ y falla con prob. $1-p$.

Definición 2 (Binomial)**.** Una v.a. binomial cuenta la cantidad de éxitos en n experimentos independientes, cada uno con prob. de éxito $p \in [0,1]$ y $1-p$ de fallar.

- $R_X = \{0, 1, ..., n\}$
- $\mathbb{E}[X] = np$
- $Var[X] = np(1-p)$

Definición 3 (Geométrica)**.** Se realizan experimentos independientes consecutivos, cada uno con prob. de éxito p y de falla $1-p$. Una *v.a.* geométrica representa el número del experimento donde se obtuvo el primer éxito.

- $R_X = \{1, 2, ...\} = \mathbb{N}$
- $\mathbb{E}[X] = \frac{1-p}{p}$
- $Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$

Probabilidades de variables aleatorias discretas.
Bernoulli $Bern(p)$
$P(X=1) = p$ y $P(X=0) = 1-p$
Binomial $Bin(n,p)$, para $k \in \{0, ..., n\}$
$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Geométrica $Geo(p)$, para $k \in \{1, 2, ...\}$
$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$
Poisson $Pois(\lambda)$, para $k \in \{0, 1, ...\}$
$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

Definición 4. Dada una v.a. X y $k \in \mathbb{N}$, le llamamos Momento de orden k al valor esperado de X^k

$$\mu_k = \mathbb{E}[X^k]$$

Definición 5. Dada una v.a. X y $t \in \mathbb{R}$, se define la función generadora de momentos de X como

$$M(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Al derivar $M(t)$ se pueden generar todos los momentos de la v.a. X.

P1. Dada una variable aleatoria no negativa X, decimos que tiene la propiedad de perdida de memoria si se cumple que

$$\forall s, t > 0, \mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$$

Demuestre que las variable aleatoria geométrica tiene la propiedad de pérdida de memoria.

P2. La adivina Solanda Yultana quiere demostrar su poder predictivo proponiendo el siguiente juego a las personas que tienen exactamente dos hijos (de cualquier sexo). Ella les hace la pregunta "Dime el nombre de una hija tuya". Si la persona responde "No tengo hijas" entonces no hay nada que adivinar y se acaba el juego sin un ganador. En cambio, si responde un nombre, Solanda intenta adivinar el sexo del otro hijo o hija. Si acierta, la persona le da \$1000 a Solanda y si no acierta, es Solanda quién entrega \$1000 a la persona. Si Solanda en realidad siempre dice "tu otro hijo es un hombre", ¿cuál es la ganancia esperada de la adivina en cada adivinanza? ¿Y su varianza? (Suponga que para todas las personas de dos hijos la probabilidad de que cada hijo sea de sexo masculino es 1/2 independiente del sexo del otro hijo).

P3. Los gastos mensuales en la entrega de un producto que sigue la variable aleatoria X, con fgm dada por $\varphi_X(t) = e^{3(e^t - 1)}$, viene dados por $G(X) = X^2 + X - 1$. Calcular la esperanza de los gastos mensuales.

P4. Considere X v.a. discreta tal que:

$$\mathbb{P}(X = r) = k(1-\beta)^{r-1} \qquad \forall r \in N - \{0\}$$

a) Qué condiciones debe satisfacer β?

b) Determinar la constante k.

c) Encuentre el valor más probable para X.

d) Considere $t \in (0,1)$, $r \in N$ calcule $\mathbb{P}(X > r + t | X \geq r)$.

Propuesto para practicar

Prop1 Sea la matriz

$$\begin{pmatrix} Y & 1 \\ 2 & Y-1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Calcule la probabilidad de que la matriz sea invertible si $Y \sim geom(p)$

Prop2 Sea $X\colon \Omega \to \mathbb{N}$ v.a. con X $Geom(p)$.

a) Pruebe que $X \sim Geom(p)$ (i.e. $\mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}$ para todo $n \geq 1$) ssi $\mathbb{P}(X \geq n) = (1-p)^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para las siguientes partes, sean $0 < p, q < 1$ y $X, Y\colon \Omega \to \mathbb{N}$ v.a.'s independientes con $X \sim Geom(p)$,$\sim Geom(q)$.

b) Encuentre $\mathbb{P}(Y = X + 1)$

c) Sea $Z = \text{mín}\, X, Y$. Demuestre que Z $Geom(s)$ para algún s, ¿cual es el s?

Darse un ratito de ver el video

$\boxed{\text{Extra}}$ Con X bernulli

$$E(X) = \cancel{0 \cdot P(X=0)} + 1 \cdot \underbrace{P(X=1)}_{p}$$

$$= 1 \cdot p = p$$

$\boxed{\text{Binomial}}$

$$E(X) = \sum_{K=1}^{N} K \cdot \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K} \qquad \binom{N}{K} = \frac{N!}{K!\,(N-K)!}$$

$$= pN$$

$$\boxed{(p+q)^N = \sum_{K=0}^{N} \binom{N}{K} p^K q^{N-K}}$$

$$q = 1-p \Rightarrow 1^N = \sum_{K=0}^{N} \binom{N}{K} p^K q^{N-K}$$

Binomial

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = 1$$

Geometric

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{k} = \frac{1}{1-(1-p)}$$

P1. Dada una variable aleatoria no negativa X, decimos que tiene la propiedad de perdida de memoria si se cumple que

s y t enteros

$$\forall s, t > 0, \mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$$

(Para el general $\lfloor s \rfloor$)

Demuestre que las variable aleatoria geométrica tiene la propiedad de pérdida de memoria.

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p \quad , \quad k \in \{1, 2, \ldots\}$$

$$P(X > s) = \sum_{k=s+1}^{\infty} P(X = k)$$

$$= \boxed{\sum_{k=s+1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p}$$

resto en índices

suma en argumento

$$= p \cdot \sum_{k=s}^{\infty} (1-p)^k$$

$$= p \left(\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k - \sum_{k=0}^{s-1} (1-p)^k \right)$$

$|a| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$$

$$\sum_{k=0}^{l} a^k = \frac{a^{l+1} - 1}{a - 1}$$

$$= p\left(\frac{1}{1-(1-p)} - \frac{1-(1-p)^s}{1-(1-p)}\right)$$

$$= \cancel{p}\left(\frac{1}{\cancel{p}} - \frac{1-(1-p)^s}{\cancel{p}}\right)$$

$$= (1-p)^s$$

$\boxed{\text{Noción fallar } s \text{ veces} \Leftrightarrow \text{Exito} > s}$

Opción 2

$$P(X > s) = \sum_{k=s+1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p$$

$$= 1 - \overbrace{P(X \leq s)}^{F_X(x)}$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{s} (1-p)^{k-1} p$$

$$\boxed{P(X > r) = (1-p)^r} \quad (*)$$

$$\underline{P(X > t+r \mid X > t)} = P(X > r)$$

$$P(X > t+r \mid X > t) = \frac{P(X > t+r,\ X > t)}{P(X > t)}$$

$X > t+r \Rightarrow X > t$

$$= \frac{P(X > t+r)}{P(X > t)}$$

Aplicar $(*)$

$$= \frac{(1-p)^{t+r}}{\cancel{(1-p)^t}} = (1-p)^r \overset{(*)}{=} P(X > r)$$

P2. La adivina Solanda Yultana quiere demostrar su poder predictivo proponiendo el siguiente juego a las personas que tienen exactamente dos hijos (de cualquier sexo). Ella les hace la pregunta "Dime el nombre de una hija tuya". Si la persona responde "No tengo hijas" entonces no hay nada que adivinar y se acaba el juego sin un ganador. En cambio, si responde un nombre, Solanda intenta adivinar el sexo del otro hijo o hija. Si acierta, la persona le da \$1000 a Solanda y si no acierta, es Solanda quién entrega \$1000 a la persona. Si Solanda en realidad siempre dice "tu otro hijo es un hombre", ¿cuál es la ganancia esperada de la adivina en cada adivinanza? ¿Y su varianza? (Suponga que para todas las personas de dos hijos la probabilidad de que cada hijo sea de sexo masculino es 1/2 independiente del sexo del otro hijo).

* Solo tiene 2 Hijos o Hijas
(Pueden ser 2 Hombres
2 mujeres o 1 y 1)

Pregunta nombre de 1 Hija

Persona No tiene ⟹ Acaba el juego
sin ganador

Persona si tiene ⟹ Trata de Adivinar
Sexo (1000 Acierto
-1000 Fracaso)

En verdad siempre dice que es hombre

Ganancia esperada

$E(X)$ $\quad X$ # Ganancia

$R_X = \{-1000, 0, 1000\}$

$P(X = -1000) = \frac{1}{4}$ (Dos hijas)

$P(X = 0) = \frac{1}{4}$ (Dos hijos)

$P(X = 1000) = \frac{1}{2}$ (1 Hijo - 1 Hija o 1 Hija - 1 Hijo)

$= \sum_{k \in R_X} k\, P(X=k)$

$E(X) = (-1000) \cdot \frac{1}{4} + \cancel{0 \cdot \frac{1}{4}}^{0} + 1000 \cdot \frac{1}{2}$

$= 1000 \cdot \frac{1}{4} = \boxed{250}$

$Var(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$

$\cancel{X}$

$$= E(x^2) - E(x)^2$$

$$\left.\begin{array}{l} E(5) = 5 \\ E(5x) = 5\,E(x) \\ E(E(x)) = E(x) \end{array}\right\} \text{Propiedad}$$

Propiedad Importante

$$E(g(x)) = \sum_{k \in R_x} g(k)\, P(x=k)$$

$$E(x^2) = \sum_{k \in R_x} k^2\, P(x=k)$$

$$Var(x) = E(x^2) - 250^2$$

$$E(x^2) = (-1000)^2 \cdot \frac{1}{4} + (1000)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 1000^2 \cdot \frac{3}{4} = 250^2 \cdot 12$$

$$\mathrm{Var}(X) = 250^2 \left(12 - 1\right)$$

$$= \boxed{250^2 \cdot 11}$$

P3. Los gastos mensuales en la entrega de un producto que sigue la variable aleatoria X, con fgm dada por $\varphi_X(t) = e^{3(e^t-1)}$, viene dados por $G(X) = X^2 + X - 1$. Calcular la esperanza de los gastos mensuales.

$$\boxed{\varphi_x^{(k)}(0) = E(x^k)}$$

$$\varphi_x(t) = E(e^{tx})$$

$$\varphi_x'(t) = E(x\,\cancel{e^{tx}})$$

$$\varphi_x'(0) = E(x \cdot 1) = E(x)$$

$$E(G(x)) = E(x^2 + x - 1)$$

$$= E(x^2) + E(x) - E(1)$$

$$= E(x^2) + E(x) - 1$$

$$\varphi_x(t) = e^{3(e^t-1)}$$

$$\varphi_x(t) = e^{3e^t} \cdot e^{-3}$$

$$\varphi_x'(t) = e^{3e^t}\, e^{-3}\, (3e^t)'$$

$$= \boxed{e^{3e^t} \cdot e^{-3}\, 3e^t}$$

$$\varphi_x'(0) = e^{3e^0} \cdot e^{-3}\, 3 \cdot e^0$$

$$= e^{3-3} \cdot 3e^0 = \boxed{3} = E(x)$$

$$\varphi_x'(t) = 3e^{-3} \cdot e^{(3e^t - t)}$$

$$\varphi_x''(t) = 3e^{-3} \cdot e^{(3e^t - t)} \cdot (3e^t - t)'$$

$$= 3e^{-3} e^{3e^t - t} \cdot (3e^t - 1)$$

$$\varphi_x''(0) = 3e^{-3} \cdot e^3 \cdot \underbrace{(3 \cdot 1 - 1)}_{2}$$

$$\varphi_x''(0) = 6 = E(x^2)$$

$$\Rightarrow E(G(x)) = 6 + 3 - 1 = \boxed{5}$$

P4. Considere X v.a. discreta tal que:

$$\mathbb{P}(X = r) = k(1-\beta)^{r-1} \qquad \forall r \in N - \{0\}$$

a) Qué condiciones debe satisfacer β?

b) Determinar la constante k.

c) Encuentre el valor más probable para X.

d) Considere $t \in (0,1)$, $r \in N$ calcule $\mathbb{P}(X > r + t | X \geq r)$. $\overset{\Downarrow}{=} P(X > r)$

Perdida de memoria

a) $0 \leq K(1-\beta)^{r-1} \leq 1$

$\beta \leq 1$

Pues sino $(-\text{Algo})^r \Rightarrow$ No se cumple $0 \leq$

$0 \leq \beta \rightarrow$ Pues sino

$(1-\beta) > 1$

$\Rightarrow (1-\beta)^{r-1} >>> 1$

$r \to \infty$ se va a infinito

b) $\sum_{K \in R_X} P(X=K) = 1$

$$\sum_{i=1}^{\infty} K (1-\beta)^{i-1} = 1$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{\sum_{i=1}^{\infty} (1-\beta)^{i-1}}$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} (1-\beta)^{i}} = \frac{1}{\frac{1}{1-(1-\beta)}}$$

$$= \beta$$

$$\Rightarrow P(X=r) = \beta (1-\beta)^{r-1} \quad r \in \{1, \dots\}$$

c) Encontrar el r^* tal que

$$P(X = r^*) \geq P(X = r)$$

$$1 > (1-\beta) > 0 \quad / \cdot (1-\beta)$$

$$\Rightarrow (1-\beta) > (1-\beta)^2 > 0$$

$$\vdots$$

Si $r_1 > r_2$

$$\Rightarrow (1-\beta)^{r_1} > (1-\beta)^{r_2}$$

$$\Rightarrow \beta(1-\beta)^{r_1} > \beta(1-\beta)^{r_2}$$

$$\Rightarrow P(X = r_1) > P(X = r_2)$$

Es decreciente

$\Rightarrow$

$\exists$ máximo

es 1

(el valor más pequeño de r)

$$\Rightarrow \boxed{P(X=1) = \beta}$$

$$f(t) = \beta (1-\beta)^{t-1} \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

$$f(t) = \beta\, e^{(t-1)\ln(1-\beta)}$$

$$f'(t) = \beta \ln(1-\beta)\, e^{(t-1)\ln(1-\beta)}$$

$$= \underbrace{\beta}_{>0} \underbrace{\ln(1-\beta)}_{<0} \underbrace{(1-\beta)^{t-1}}_{>0}$$

$\Rightarrow f$ es decreciente

d) $\Rightarrow P(X > r) = (1-p)^r$

Por pregunta $\boxed{1}$

Prop1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} Y & 1 \\ 2 & Y-1 \end{pmatrix}$$

Calcule la probabilidad de que la matriz sea invertible si $Y \sim geom(p)$

$$A \text{ inv} \iff \det(A) \neq 0$$

$$P(A \text{ invertible}) = P(\det(A) \neq 0)$$

$$\det(A) \neq 0 \iff Y(Y-1) - 2 \neq 0$$

$$Y^2 - Y - 2 \neq 0$$

$$P(\det(A) \neq 0) = 1 - P(\det(A) = 0)$$

$$\Rightarrow \det(A) = 0 \iff Y^2 - Y - 2 = 0$$

$$Y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$Y = \frac{1 \pm 3}{2} = -1 \vee 2$$

$P(Y = -1) = 0$ Geometrisch $R_Y = \{1, \dots$

$$P(Y = 2) = (1-p)^{2-1} \cdot p$$

$$= (1-p)\,p$$

$$P(A \text{ inv}) = P(\det(A) \neq 0) = 1 - P(\det(A) = 0)$$

$$= 1 - P(Y = -1 \vee Y = 2)$$

$$= 1 - P(Y = 2)$$

$$= 1 - (1-p)\,p$$

$$P(A \text{ inv}) = \boxed{1 - p + p^2}$$

Calcule la probabilidad de que la matriz sea invertible si $Y \sim geom(p)$

Prop2 Sea $X : \Omega \to \mathbb{N}$ v.a. con X $Geom(p)$.

a) Pruebe que $X \sim Geom(p)$ (i.e. $\mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}$ para todo $n \geq 1$) ssi $\mathbb{P}(X \geq n) = (1-p)^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para las siguientes partes, sean $0 < p, q < 1$ y $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ v.a.'s independientes con $X \sim Geom(p), \sim Geom(q)$.

b) Encuentre $\mathbb{P}(Y = X + 1)$

c) Sea $Z = \text{mín}\, X, Y$. Demuestre que Z $Geom(s)$ para algún s, ¿cual es el s?

a) $\boxed{\Rightarrow}$ $P(X=N) = (1-p)^{N-1} p \Rightarrow P(X \geq N) = (1-p)^{N-1}$

$\boxed{\Leftarrow}$ $P(X \geq N) = (1-p)^{N-1}$ $\quad P(X \geq N \setminus X \geq N+1)$

$$P(X \geq N \cap (X \geq N+1)^c)$$

$$P(X = N) = P(X \geq N) - P(X \geq N+1)$$

$$= (1-p)^{N-1} - (1-p)^{N}$$

$$= (1-p)^{N-1}(1-(1-p))$$

$$\boxed{P(X=N) = (1-p)^{N-1} p}$$

b) $P(Y = X+1) = \sum_{K \in R_X}^{\text{Todos}} P(Y = X+1 \mid X = K) P(X=K)$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(Y=X+1 \mid X=k)\, P(X=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(Y=k+1 \mid X=k)\, P(X=k)$$

Como $Y \perp X$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(Y=\underline{k+1})\, P(X=\underline{k})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (1-q)^{k+1-1} \cdot q \,(1-p)^{k-1} \cdot p$$

$$= pq \sum_{k=1}^{\infty} (1-q)^{k} \cdot (1-p)^{k-1}$$

$$= pq(1-q) \sum_{k=1}^{\infty} \left[(1-q)(1-p)\right]^{k-1}$$

$$= pq(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} \left[(1-q)(1-p)\right]^{k}$$

$$P(Y=X+1) = \boxed{pq(1-q)\,\frac{1}{1-(1-q)(1-p)}}$$

i) por a)

Sabemos que $P(W \geq k) = (1-s)^{k-1}$

$$\Longleftarrow \quad W \sim Geom(s)$$

$\boxed{QD}$

$$P(Z \geq k) = (1-s)^{k-1}$$

$$P(Z \geq k) = P(\mathrm{Min}(X,Y) \geq k)$$

Prop minima

$$= P(X \geq k,\ Y \geq k)$$

$$\overset{\text{Ind}}{=} P(X \geq k) \cdot P(Y \geq k)$$

$$= (1-p)^{k-1} \cdot (1-q)^{k-1}$$

$$= \left[(1-p)(1-q)\right]^{k-1}$$

$$= \left[1 - \underbrace{(p+q-pq)}_{s}\right]^{k-1}$$

$$Z \sim \mathrm{Geom}(p+q-pq)$$