MA3403-4. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 1 de octubre de 2021

Auxiliar 5: Probabilidad Condicional y Variables Aleatorias

Definición 1 (Prob. Condicionada)**.** Dados dos eventos A, B, se define la probabilidad condicionada de A dado B (cuando $\mathbb{P}(B) \neq 0$), como

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Propiedades 1 (Prob. condicionada)**.** *Dados dos eventos A y B, se cumple*

1. *Si $E_1, E_2, E_3, ...$ son eventos mutuamente excluyentes*

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} E_i | F\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(E_i | F\right)$$

2. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$ *(regla de la multiplicación)*

Teorema 1 (Bayes)**.** *Dados dos eventos A, B, se tiene que*

$$\mathbb{P}\left(A|B\right) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Teorema 2 (Probabilidades Totales)**.** *Dada una colección de eventos $\{A_1, ..., A_n\}$ mutuamente excluyentes que particionan el espacio muestral, se cumple que, dado cualquier evento B,*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

Definición 2 (Bernoulli)**.** Experimento tiene sólo dos posibles resultados: Éxito con prob. $p \in [0, 1]$ y falla con prob. $1 - p$.

Definición 3 (Binomial)**.** Una v.a. binomial cuenta la cantidad de éxitos en n experimentos independientes, cada uno con prob. de éxito $p \in [0, 1]$ y $1 - p$ de fallar.

- $R_X = \{0, 1, ..., n\}$
- $\mathbb{E}[X] = np$
- $Var[X] = np(1 - p)$

Definición 4 (Geométrica)**.** Se realizan experimentos independientes consecutivos, cada uno con prob. de éxito p y de falla $1 - p$. Una *v.a.* geométrica representa el número del experimento donde se obtuvo el primer éxito.

- $\boxed{R_X = \{1, 2, ...\} = \mathbb{N}}$ y $P(X=0)=0$
- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1 - p}{p}$
- $Var[X] = \dfrac{1 - p}{p^2}$

Probabilidades de variables aleatorias discretas.
Bernoulli $Bern(p)$
$P(X = 1) = p$ y $P(X = 0) = 1 - p$ → $R_X = \{0,1\}$
Binomial $Bin(n, p)$, para $k \in \{0, ..., n\}$
$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$
Geométrica $Geo(p)$, para $k \in \{1, 2, ...\}$ → Range
Func probabilidad → $P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$
Poisson $Pois(\lambda)$, para $k \in \{0, 1, ...\}$
$\boxed{P(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}}$

P1. Usted tiene un grupo de 10 amigas, 4 son mentirosas y 6 son sinceras (no se sabe quien es mentirosa o sincera). Usted tiene que responder una pregunta, para esto tiene la opcion de pedirle ayuda a solo una de sus amigas y sabe que la probabilidad de que cualquiera de sus amigas sepa la respuesta es $\frac{3}{4}$ independientemente de si es sincesa o mentirosa, si no sabe la respuesta, la probabilidad de que le diga la correcta es $\frac{1}{2}$ y si sabe, su amiga con probabilidad 1 hara honra a su nombre de mentirosa o sincera.

Si usted tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ de saber la correcta y $\frac{1}{5}$ de achuntarle al no saberla, le conviene pedir ayuda a alguna de sus amigas?

P2. ¿Cuantas soluciones naturales tiene la ecuación $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$

P3. Sea $\Omega = \{\omega = (x, y) | x, y \in \{1, 2, ..., 6\}\}$, dotado del modelo equiprobable, es decir, $P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{36}$. Este espacio (Ω, P) puede representar el lanzamiento de dos dados hexagonales equilibrados. Se define la variable aleatoria $X(\omega) = xy$, $\forall \omega = (x, y) \in \Omega$.

Determinar la función de probabilidad $p_X(x)$ de y la de distribución $F_x(x)$.

Propuesto para practicar

Prop1. En la isla de Combinatoria, todos los autos tiene una patente de 5 d ıgitos (del 1 al 9). Un testigo de un crimen solo pudo dar una descripción parcial de la patente del auto que se fugóo del lugar de los hechos. De acuerdo al testigo, la patente ten ıa un solo dıgito que ocurre mas de una vez y ese dígito aparecía 3 veces. ¿Cuál es el porcentaje de vehículos sospechosos?

Prop2. Una mano de bridge consta de 13 cartas, escogidas al azar en un mazo de naipe inglés de 52 cartas. Cada mano se puede valorar con una cierta cantidad de puntos, digamos N, de manera que un as (A) aporta 4 puntos, un rey (K) 3, una dama (Q) 2 y un Jack (J) 1. Las demás cartas no dan puntos. Se definen además las v.a. X como el puntaje de la mano.

Determinar el rango de X, la función de probabilidad $p_X(x)$ de y la de distribución $F_x(x)$, para los valores del rango.

P1. Usted tiene un grupo de 10 amigas, 4 son mentirosas y 6 son sinceras (no se sabe quien es mentirosa o sincera). Usted tiene que responder una pregunta, para esto tiene la opcion de pedirle ayuda a solo una de sus amigas y sabe que la probabilidad de que cualquiera de sus amigas sepa la respuesta es $\frac{3}{4}$ independientemente de si es sincesa o mentirosa, si no sabe la respuesta, la probabilidad de que le diga la correcta es $\frac{1}{2}$ y si sabe, su amiga con probabilidad 1 hara honra a su nombre de mentirosa o sincera.

Si usted tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ de saber la correcta y $\frac{1}{5}$ de achuntarle al no saberla, le conviene pedir ayuda a alguna de sus amigas?

- Hay gente sincera y mentirosa
- " " sabe la respuesta y gente que no
- Puedo tener la respuesta correcta a pesar de no saber
- Uno tiene su propia opción de saber la respues o achuntarle

$$P(M) = \frac{2}{5}$$

$$P(M^c) = \frac{3}{5}$$

independiente

$$P(\text{Saber} \mid M^c) = P(\text{Saber})$$
$$= P(\text{Saber} \mid M)$$
$$\Leftrightarrow P(\text{Saber} \cap M^c) = P(\text{Saber}) \cdot P(M^c)$$
$$P(\text{Saber} \cap M) = P(\text{Saber}) \cdot P(M)$$

$$P(\text{Saber}) = \frac{3}{4}$$

$$P(C \mid \text{Sabe}^c) = \frac{1}{2}$$

$$P(C^c \mid \text{Sabe}^c) = \frac{1}{2}$$

$$P(C \mid \text{Sabe} \cap M^c) = \underline{1}$$

$$P(C^c \mid \text{Sabe} \cap M) = 1$$

$$P(C \mid \text{Sabe} \cap M) = 0$$

$$P(C^c \mid \text{Sabe} \cap M^c) = 0$$

<u>Preguntando a una Amiga</u>

$$P(C) \overset{\text{Totales}}{=} \cancel{P(C \mid M)P(M) + P(C \mid M^c)P(M^c)}$$

No esta mal, pero hay un camino mejor

$$= \cancelto{0}{P(C \mid M \cap S_{abc})}\, P(M \cap S_{abc}) +$$

$$P(C \mid M \cap S_{abc}^c)\, P(M \cap S_{abc}^c) +$$

$$P(C \mid M^c \cap S_{abc})\, P(M^c \cap S_{abc}) +$$

$$P(C \mid M^c \cap S_{abc}^c)\, P(M^c \cap S_{abc}^c)$$

$$= P(C \mid M \cap S_{abc}^c)\, P(M \cap S_{abc}^c) +$$

$$P(M^c \cap S_{abc}) +$$

$$P(C \mid M^c \cap S_{abc}^c)\, P(M^c \cap S_{abc}^c)$$

$$= P(C \cap M \cap S_{abc}^c) + P(M^c \cap S_{abc})$$

$$P(C \mid M \cap S_{abc}^c) = \frac{P(C \cap M \cap S_{abc}^c)}{P(M \cap S_{abc})}$$

$$+ P(C \cap M^c \cap S_{abc}^c)$$

$$= P(\underbrace{C \cap S_{abc}^c}_{\text{cond}}) + P(\underbrace{M^c \cap S_{abc}}_{\text{ind}})$$

$$= P(C \mid S_{abc}^c)\, P(S_{abc}^c) + P(M^c)\, P(S_{abc})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{9}{20} = \frac{5+18}{40} = \boxed{\frac{23}{40}}$$

P1. Usted tiene un grupo de 10 amigas, 4 son mentirosas y 6 son sinceras (no se sabe quien es mentirosa o sincera). Usted tiene que responder una pregunta, para esto tiene la opcion de pedirle ayuda a solo una de sus amigas y sabe que la probabilidad de que cualquiera de sus amigas sepa la respuesta es $\frac{3}{4}$ independientemente de si es sincesa o mentirosa, si no sabe la respuesta, la probabilidad de que le diga la correcta es $\frac{1}{2}$ y si sabe, su amiga con probabilidad 1 hara honra a su nombre de mentirosa o sincera.

Si usted tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ de saber la correcta y $\frac{1}{5}$ de achuntarle al no saberla, le conviene pedir ayuda a alguna de sus amigas?

Solo $P(\text{Saber}) = \frac{1}{2}$, $P(C \mid \text{Saber}^c) = \frac{1}{5}$

$$P(C)^{\text{Total}} = P(C \mid \text{Sabe}) P(\text{Saber}) + P(C \mid \text{Saber}^c) P(\text{Saber}^c)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{5} = \boxed{\frac{24}{40}}$$

Mejor No pedir la respuesta

P2. ¿Cuantas soluciones naturales tiene la ecuación $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$

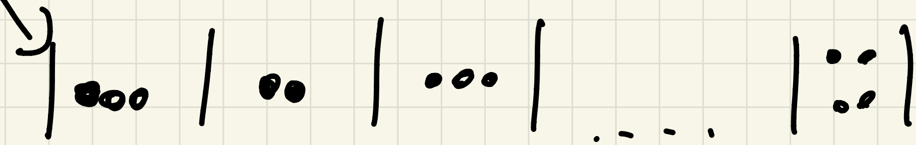
$x_i \geq 0$ y $\in \mathbb{N}$

$x_1 = N$

$x_i = 0 \quad \forall i > 1$

$(N-1, 1, 0, \ldots, 0)$

$(N, 0, 0, \ldots, 0)$



K urnas $\rightarrow$ $K+1$ palitos

N - pelotitas

$X_1 =$ # Pelotitas en urna 1

$\vdots$

$X_K =$ # " urna K

Mezcla

N - pelotitas

K - 1 palitos

$$\underbrace{\circ\circ}_{2} \mid \underbrace{\circ\circ}_{2} \mid \mid \mid \mid \mid \underbrace{\circ\circ}_{2} \mid \dots \mid .$$

$$\frac{(N+K-1)!}{N! \cdot (K-1)!} = \binom{N+K-1}{N}$$

$$\frac{N+K-1}{\text{lugares}}$$

N-pelotitas

o en K-1 palitos

$$\binom{N+K-1}{N} \rightarrow \text{Los lugares de las N pelotitas}$$

$$\boxed{\binom{N}{K} = \binom{N}{N-K}}$$

P3. Sea $\Omega = \{\omega = (x, y)|x, y \in \{1, 2, ..., 6\}\}$, dotado del modelo equiprobable, es decir, $P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{36}$. Este espacio (Ω, P) puede representar el lanzamiento de dos dados hexagonales equilibrados. Se define la variable aleatoria $X(\omega) = xy$, $\forall\omega = (x, y) \in \Omega$.

Determinar la función de probabilidad $\boxed{p_X(x)}$ de y la de distribución $F_x(x)$.

$\Omega = \{w = (x,y) \mid x,y \in \{1,2,\dots,6\}\}$

$= \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6)$

$\dots, (6,6)\}$

$|\Omega| = 36$

$Z(w) = xy \qquad Z : \Omega \to \mathbb{R}$

$R_Z : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16,$

$18, 20, 24, 25, 30, 36\}$

$P(Z=1) = \frac{1}{36}, \quad P(Z=2) = \frac{2}{36}$

$P(Z=3) = \frac{2}{36}$, $P(Z=4) = \frac{3}{36}$

$P(Z=5) = \frac{2}{36}$, $P(Z=6) = \frac{4}{36}$

$P(Z=7) = 0$ $\qquad \underline{K \notin R_Z}$ $P(Z=k) = 0$

$P(Z=8) = \frac{2}{36}$

$P(Z=36) = \frac{1}{36}$

Distribución (Siempre es creciente)

$$F_Z(K) = P(Z \leq K)$$

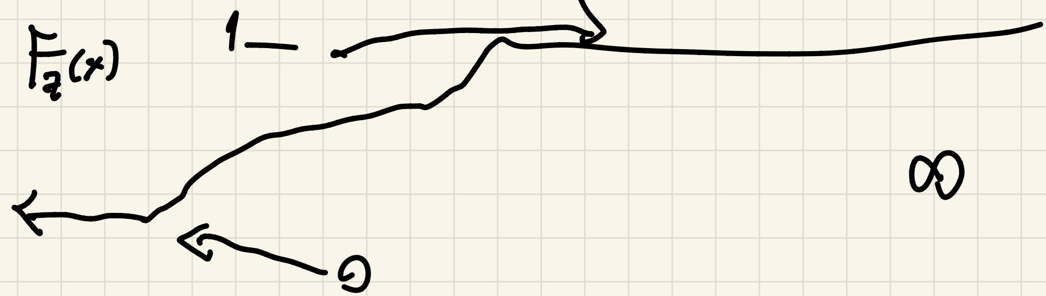
$$F_Z(1) = P(Z \leq 1) = P(Z=1) = \frac{1}{36}$$

$$F_Z(0) = P(Z \leq 0) = 0$$

$$\Rightarrow F_Z(-K) = 0$$

$$F_Z(2) = \frac{1}{12} = \frac{3}{36} = P(Z=1) + P(Z=1)$$

$$F_Z(36) = P(Z=1) + P(Z=2) + \dots \text{ y } P(Z=36)$$
$$= \underline{1}$$



$$F_Z(37) = 1$$

$$F_Z = P(X \le -100.000) = 0$$

$$P(Z = -1) = 0$$

$$F_Z(-1) = 0$$

Geometrica

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1}\, p$$

$$R_X = \{1, \dots, \}$$

$$F_X(j) = \sum_{i=1}^{j} P(X=i)$$

$$= \sum_{i=1}^{j} (1-p)^{i-1} p$$

$$= p \sum_{i=0}^{j-1} (1-p)^{i}$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{K} a^{i} = \frac{a^{K+1}-1}{a-1}}$$

Geometrica

$$= p \cdot \left(\frac{(1-p)^j - 1}{1-p-1} \right)$$

$$\boxed{F_X(j) = 1 - (1-p)^j}$$

Prop1. En la isla de Combinatoria, todos los autos tiene una patente de 5 d ıgitos (del 1 al 9). Un testigo de un crimen solo pudo dar una descripción parcial de la patente del auto que se fugóo del lugar de los hechos. De acuerdo al testigo, la patente ten ıa un solo dıgito que ocurre mas de una vez y ese dígito aparecía 3 veces. ¿Cuál es el porcentaje de vehículos sospechosos?

Solo 1 dígito aparece más de 1 vez

y es más aparece 3 veces

_ _ _ _ _

Iguales   Distintos   (Falta ver orden)

<u>Casos Totales</u> 9^5 (Hay 9 opciones para cada dígito)

<u>Casos Favorables</u>   Hay que escoger 3 números

Después ordenar

<u>Idea</u>

Escogemos 1 2 3

igual para distintos

$\underline{1}$ 2 $\underline{1}$ 3 $\underline{1}$

3 2

1 3 2

$\underline{1}$ $\underline{3}$ $\underline{1}$ $\underline{2}$ $\underline{1}$

Primero escogemos el número de los iguales $\Rightarrow$ 9 opciones

Repartimos con $\binom{5}{3}$ las posiciones de los iguales

$\overset{x}{\theta} - \overset{x}{\theta} \quad - \overset{x}{\theta}$

$$\boxed{9 \cdot \binom{5}{3} \cdot 8 \cdot 7}$$

opciones primer digito distinto

Segundo digito disto

Escoge los otros 2 números

opciones de posición

$$\binom{8}{2} \cdot 2!$$

$$\frac{8!}{\cancel{2!} \cdot 6!} \cdot \cancel{2!} = 8 \cdot 7$$

Prop2. Una mano de bridge consta de 13 cartas, escogidas al azar en un mazo de naipe inglés de 52 cartas. Cada mano se puede valorar con una cierta cantidad de puntos, digamos N, de manera que un as (A) aporta 4 puntos, un rey (K) 3, una dama (Q) 2 y un Jack (J) 1. Las demás cartas no dan puntos. Se definen además las v.a. X como el puntaje de la mano.

Determinar el rango de X, la función de probabilidad $p_X(x)$ de y la de distribución $F_x(x)$, para los valores del rango.

R_x valores posibles

$$R_x = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 37\}$$

$$\begin{array}{cccc} 4 \cdot & 3 \cdot & 2 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{array} \Rightarrow \underbrace{16 + 12 + 8 + 1}_{37}$$

$$P_x(0) = \frac{\binom{36}{13}}{\binom{52}{13}}$$

$$P_x(1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{36}{12}}{\binom{52}{13}}$$

$$P_X(2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{36}{11} + \binom{4}{1}\binom{36}{12}}{\binom{52}{13}}$$

$$P_X(3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{36}{10} + \binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{36}{11} + \binom{4}{1}\binom{36}{12}}{\binom{52}{13}}$$

$$P_X(4) = \frac{\binom{4}{4}\binom{36}{9} + \binom{4}{2}\binom{36}{11} + \binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{36}{10} + \binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{36}{11} + \binom{4}{1}\binom{36}{12}}{\binom{52}{13}}$$

$\boxed{\text{Mc Conrre bei } \binom{52}{13}}$

$$P_X(5) = \binom{4}{3}\binom{4}{1}\binom{36}{9} + \binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{36}{10} + \binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{36}{11} + \binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{36}{10}$$

$$+ \binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{36}{11}$$

$$P_X(6) = \binom{4}{4}\binom{4}{1}\binom{36}{8} + \binom{4}{3}\binom{4}{1}\binom{36}{9} + \binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{36}{10} +$$

$$\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{36}{9}+\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{36}{10}+\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{36}{11}$$

$$+\binom{4}{3}\binom{36}{10}+\binom{4}{2}\binom{36}{11}$$

$$P_X(7)=\binom{4}{4}\binom{4}{1}\binom{36}{8}+\binom{4}{3}\binom{4}{1}\binom{36}{9}+\binom{4}{3}\binom{4}{2}\binom{36}{8}$$

$$+\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{36}{9}+\binom{4}{1}\binom{4}{3}\binom{36}{9}+$$

$$+\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{36}{10}+\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{36}{10}+$$

$$+\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{36}{11}$$

$\vdots$

$$P_X(36)=\binom{4}{4}\binom{4}{4}\binom{4}{4}\binom{36}{1}$$

$$+\binom{4}{4}\binom{4}{4}\binom{4}{3}\binom{4}{2}$$

$$P_X(37)=\binom{4}{4}\binom{4}{4}\binom{4}{4}\binom{4}{1}$$

$$F_X(k) = \sum_{i=0}^{k} P_X(i)$$

$$F_X(37) = \underline{1}$$

$$F_X(36) = 1 - \frac{\overset{1}{\cancel{\binom{4}{4}}}\,\overset{1}{\cancel{\binom{4}{4}}}\,\overset{1}{\cancel{\binom{4}{4}}}\,\cancel{\binom{4}{1}}^{\,4}}{\binom{52}{13}}$$

$$\boxed{F_X(36) = 1 - \frac{4}{\binom{52}{13}}}$$

$$\boxed{k \geq 37}$$

$$F(k) = \underline{1}$$

$$\boxed{k \leq -1}$$

$$F(k) = 0$$