MA3403-4. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 24 de septiembre de 2021

Auxiliar 4: Combinatoria y Probabilidad Condicional

Definición 1 (Prob. Condicionada)**.** Dados dos eventos A, B, se define la probabilidad condicionada de A dado B (cuando $\mathbb{P}(B) \neq 0$), como

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Propiedades 1 (Prob. condicionada)**.** *Dados dos eventos A y B, se cumple*

1. *Si $E_1, E_2, E_3, \ldots$ son eventos mutuamente excluyentes*

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} E_i | F\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(E_i | F\right)$$

2. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$ *(regla de la multiplicación)*

Teorema 1 (Bayes)**.** *Dados dos eventos A, B, se tiene que*

$$\mathbb{P}\left(A|B\right) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Teorema 2 (Probabilidades Totales)**.** *Dada una colección de eventos $\{A_1, \ldots, A_n\}$ mutuamente excluyentes que particionan el espacio muestral, se cumple que, dado cualquier evento B,*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

P1. Se dispone de dos monedas, una equilibrada y la otra con probabilidad $2/3$ de cara. Se escoge al azar una de las dos monedas, y se lanza dos veces. Sea C_i el evento en que el lanzamiento i resulta cara, para $i = 1, 2$. ¿Son independientes los eventos C_1 y C_2? Explique.

P2. (Monty Hall)

Suponga que usted está en un concurso de televisión en donde tiene que elegir una de 3 puertas P_1, P_2 y P_3. Atrás de una de ellos hay un millonario premio, mientras que las otras dos hay cabras. La producción del programa hizo la repartición de las cabras y el premio de forma aleatoria.

Usted elige la puerta 1, y el animador (que ya sabe lo que hay detrás de cada puerta, por lo que no abrirá la puerta en la que está el premio) abre la puerta 3 que contenía una cabra. Luego, el animador le ofrece cambiar a la puerta 2. **¿Le conviene cambiar de puerta, o es mejor mantenerse con la puerta 1?** Asuma que el animador escoge al azar cual puerta abrir entre las que usted no eligió y no contienen el premio.

P3. Un grupo de 4 alumnos p_1, p_2, p_3 y p_4 debe realizar una tarea que consta de 12 problemas (enumerados de 1 a 12). Debido al semestre on line, encuentran que va a ser difícil resolver en conjunto los problemas, por lo que deciden repartirse los problemas para resolver cada uno 3 problemas de forma independiente.

i) ¿De cuántas maneras se pueden repartir los problemas?
ii) ¿Cual es la probabilidad de que al alumno p_1 le toque hacer problemas consecutivos?
iii) ¿Cual es la probabilidad que a todos les toque hacer problemas consecutivos?

P4. Un fugitivo se encuentra en una de n zonas (no conectadas entre si). La probabilidad de que se encuentre en la i-ésima zona es p_i y si esta ahí, se le encuentra con probabilidad α_i.

a.1) Si se hace una búsqueda en todas la zonas, determine la probabilidad de encontrarlo.
a.2) Si se le busca en todas las zonas y no se encuentra, determine la probabilidad de que éste en la zona 1.
b) **(Bonus)** Se buscó en la zona j y no se le encontró. Calcule la probabilidad que éste en la zona i, para todo $i = 1, \ldots, n$.

P1. Se dispone de dos monedas, una equilibrada y la otra con probabilidad 2/3 de cara. Se escoge al azar una de las dos monedas, y se lanza dos veces. Sea C_i el evento en que el lanzamiento i resulta cara, para $i = 1, 2$. ¿Son independientes los eventos C_1 y C_2? Explique.

P[redacted])

Cuando $A \perp B$

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(A,B) = P(A \cap B)$$

independencia

$$= P(A) \cdot P(B)$$

$\boxed{P1}$

$$P(C|M_1) = \frac{1}{2} = P(S|M_1)$$

$$P(C|M_2) = \frac{2}{3}.$$

$$P(S|M_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(M_1) = P(M_2) = \frac{1}{2}$$

¿C_1 y C_2 independientes?

¿$P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2)$?

$$P(C_1 \cap C_2 | M_1) = P(C_1|M_1) \cdot P(C_2|M_1)$$
$$= \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$P(C_1 \cap C_2 | M_2) = \boxed{\frac{4}{9}}$$

$$P(C_1 \cap C_2) \overset{\text{Prob Total}}{=} P(C_1 \cap C_2 | M_1) \cdot P(M_1)$$
$$+ P(C_1 \cap C_2 | M_2) P(M_2)$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{9+16}{36}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \boxed{\frac{25}{72}}$$

$$P(C_1) \overset{\text{Totales}}{=} P(C_1 | M_1) \cdot P(M_1) + P(C_1 | M_2) P(M_2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3+4}{6}\right) = \frac{7}{12}$$

$$P(C_2) = P(C_2 | M_1) P(M_1) + P(C_2 | M_2) P(M_2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{P(C_2 | M_1)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{P(C_2 | M_2)}_{\frac{2}{3}}\right)$$

CS
CC
SS
SC

$$\underbrace{P(C_i | M_1)}_{\frac{1}{2}} = P(C_1 | M_1)$$

$$P(C_2) = P(C_1) = P(C_{124}) = \frac{7}{12}$$

$$P(C_2) \cdot P(C_1) = \frac{49}{144} \neq \frac{25}{72}$$

C_2 y C_1 son dependientes

P2. **(Monty Hall)**

Suponga que usted está en un concurso de televisión en donde tiene que elegir una de 3 puertas P_1, P_2 y P_3. Atrás de una de ellos hay un millonario premio, mientras que las otras dos hay cabras. La producción del programa hizo la repartición de las cabras y el premio de forma aleatoria.

Usted elige la puerta 1, y el animador (que ya sabe lo que hay detrás de cada puerta, por lo que no abrirá la puerta en la que está el premio) abre la puerta 3 que contenía una cabra. Luego, el animador le ofrece cambiar a la puerta 2. **¿Le conviene cambiar de puerta, o es mejor mantenerse con la puerta 1?** Asuma que el animador escoge al azar cual puerta abrir entre las que usted no eligió y no contienen el premio.

A_i : Abrieron puerta i

P_i : Premio en la puerta i

$\mathbb{P}(A_i \mid P_i) = 0$ (No se puede abrir la puerta con el premio)

X_i : El jugador escoge la puerta i

$\mathbb{P}(\text{Ganas quedandote}) = \mathbb{P}(P_1 \mid X_1, A_3)$

$\mathbb{P}(\text{Ganas cambiando}) = \mathbb{P}(P_2 \mid X_1, A_3)$

$$\mathbb{P}(P_3 \mid X_1, A_3) = 0$$

$$\Omega = P_1 \cup P_2 \cup P_3$$

$P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$

$P_2 \cap P_3 \neq \emptyset$

$P_1 \cap P_3 \neq \emptyset$

Partición

$$\mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}(P_2) + \mathbb{P}(P_3) = 1$$

$$\mathbb{P}(P_1 \mid Z) + \mathbb{P}(P_2 \mid Z) + \mathbb{P}(P_3 \mid Z) = 1$$

$$\mathbb{P}(P_1 \mid X_1, A_3) = 1 - \mathbb{P}(P_2 \mid X_1, A_3)$$

$$\mathbb{P}(P_1) = \frac{1}{3} = \mathbb{P}(P_2) = \mathbb{P}(P_3)$$

$$\mathbb{P}(X_1) = \frac{1}{3} = \mathbb{P}(X_2) = \mathbb{P}(X_3)$$

$$\mathbb{P}(X_1, P_1) = \mathbb{P}(X_1 \cap P_1) = \mathbb{P}(X_1) \cdot \mathbb{P}(P_1) = \frac{1}{9}$$

$$\mathbb{P}(X_1 \mid P_1) \overset{?}{=} \mathbb{P}(X_1) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(X_1 \cap P_1) \cdot \mathbb{P}(P_1)$$

$$\mathbb{P}(X_2 \cap P_3) = \mathbb{P}(X_2) \cdot \mathbb{P}(P_3) = \frac{1}{9}$$

$$\mathbb{P}(A_1 \mid X_1, P_1) = 0$$

$$\mathbb{P}(A_1 \mid X_1, P_2) = 0$$

$$\mathbb{P}(A_1 \mid X_1, P_3) = 0$$

$$\mathbb{P}(A_2 \mid X_1, P_1) = 1/2$$

$$\mathbb{P}(A_2 \mid X_1, P_2) = 0$$

$$\mathbb{P}(A_2 \mid X_1, P_3) = 1$$

$$\mathbb{P}(A_3 \mid X_1, P_1) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A_3 \mid X_1, P_2) = 1$$

$$\mathbb{P}(A_3 \mid X_1, P_3) = 0$$

$$\mathbb{P}(P_2 \mid X_1, A_3) = \frac{\mathbb{P}(P_2, X_1, A_3) \to (1)}{\mathbb{P}(X_1, A_3) \to (2)}$$

(1) $\mathbb{P}(A_3, X_1, P_2) = \underbrace{\mathbb{P}(A_3 \mid X_1, P_2)}\underbrace{\mathbb{P}(X_1, P_2)}$

$= \mathbb{P}(A_3 \mid X_1, P_2)\, \mathbb{P}(X_1) \cdot \mathbb{P}(P_2)$

$= 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{9}}$

$$\mathbb{P}(A) \overset{\text{Totales}}{=} \overline{\mathbb{P}(A \mid B_1)\, \mathbb{P}(B_1)} + \mathbb{P}(A \mid B_2)\, \mathbb{P}(B_2) + \dots + \mathbb{P}(A \mid B_n)\, \mathbb{P}(B_n)$$

$$\overset{*}{=} \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \dots + \mathbb{P}(A \cap B_n)$$

$\mathbb{P}(A_3 \mid X_1, P_1) = \mathbb{P}(A_3, X_1, P_1) / \mathbb{P}(X_1, P_1)$

$$\mathbb{P}(A_3, X_1) \overset{\text{Totales 2.0}}{=} \mathbb{P}(A_3, X_1, P_1) + \mathbb{P}(A_3, X_1, P_2) + \mathbb{P}(A_3, X_1, P_3)$$

$$= \mathbb{P}(A_3 | X_1, P_1)\,\mathbb{P}(X_1)\,\mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}(A_3 | X_1, P_2)\,\mathbb{P}(X_1)\,\mathbb{P}(P_2) + \mathbb{P}(A_3 | X_1, P_3)\,\mathbb{P}(X_1)\,\mathbb{P}(P_3)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(P_2 | X_1, A_3) = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{6}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(P_1 | X_1, A_3) = \frac{1}{3}}$$

$\Rightarrow$ Conviene cambiarse

P3. Un grupo de 4 alumnos p_1, p_2, p_3 y p_4 debe realizar una tarea que consta de 12 problemas (enumerados de 1 a 12). Debido al semestre on line, encuentran que va a ser difícil resolver en conjunto los problemas, por lo que deciden repartirse los problemas para resolver cada uno 3 problemas de forma independiente.

i) ¿De cuántas maneras se pueden repartir los problemas?

ii) ¿Cual es la probabilidad de que al alumno p_1 le toque hacer problemas consecutivos?

iii) ¿Cual es la probabilidad que a todos les toque hacer problemas consecutivos?

i) Casos Totales

$\boxed{\text{de } 12}$

o o o

P_1

Cuando escoge los 3 problemas

(No hay orden)

$\binom{12}{3}$ → opciones → Tamaño

o o o → $\boxed{\text{de } 9}$

P_2

$\binom{9}{3}$

$P_3 \quad \binom{6}{3}$

$P_4 \quad \binom{3}{3} \longrightarrow = \underline{1}$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Hay} \quad \binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3} \quad \text{maneras}}$$

b) Casos Favorables

$P_1 \to$ 123
234
345
$\vdots$
9 10 11
10 11 12

10 maneras

$$10 \cdot \binom{9}{3}\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3}$$

Maneras de Tomar consecutivas

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{10}{\binom{12}{3}}}$$

c) Que a ningún le toque

123 456 789 101112

$P_1 \to 4$ opciones

$P_2 \to 3$ no le P_1

$P_3 \to 2$ no P_1 ni P_3

$P_4 \to 1$

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\cdot 1}}$$

P4. Un fugitivo se encuentra en una de n zonas (no conectadas entre si). La probabilidad de que se encuentre en la i-ésima zona es p_i y si esta ahí, se le ~~encuentra~~ Descubre con probabilidad α_i.

a.1) Si se hace una búsqueda en todas la zonas, determine la probabilidad de encontrarlo.

a.2) Si se le busca en todas las zonas y no se encuentra, determine la probabilidad de que éste en la zona 1.

b) **(Bonus)** Se buscó en la zona j y no se le encontró. Calcule la probabilidad que éste en la zona i, para todo $i = 1, ..., n$.

$P(E_i) = p_i$ $\qquad \bigcup E_i = \Omega$

$P(D_i \mid E_i) = \alpha_i$

$P(D_i^c \mid E_i) = 1 - \alpha_i$

$P(D_j \mid E_i) = 0$. si $j \neq i$

$P(D_j^c \mid E_i) = 1$

a) $P(E \mid \bigcup E_i) = P(E)$

$$P(E) \overset{\text{Todos}}{=} \sum_{i=1}^{N} P(E \mid E_i) P(E_i)$$

Pues si $D_j \neq D_i \Rightarrow P(\,) = 0$

$$= \sum_{i=1}^{N} P(D_i \mid E_i) P(E_i)$$

$$\boxed{P(E) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i p_i}$$

a2) $$P(E_1 | E^c) = \frac{P(E^c | E_1) \cdot P(E_1)}{P(E^c)}$$

$$P(E^c | E_1) = 1 - P(E | E_1)$$
$$= 1 - P(D_1 | E_1)$$
$$= 1 - \alpha_1$$

$$\boxed{P(E_1 | E^c) = \frac{(1-\alpha_1)\, p_1}{1 - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i p_i}}$$

b) Se busco j y no se encontró

Calculo la prob de E_i

$\boxed{\text{general}}$

$$P(E_i \mid D_j^c)$$

Si $i=j$

$$P(E_i \mid D_i^c) \overset{\text{bayes}}{=} \frac{P(D_i^c \mid E_i)\, P(E_i)}{P(D_i^c)}$$

$$= \frac{(1-\alpha_i)\, p_i}{1 - P(D_i)}$$

$$= \frac{(1-\alpha_i)\, p_i}{1 - \sum_{k=1}^{n} P(D_i \mid E_k)\, P(E_k)}$$

1

$$= \frac{(1-\alpha_i)\, p_i}{1 - P(D_i \mid E_i)\, P(E_i)}$$

$$= \boxed{\frac{(1-\alpha_i)\, p_i}{1 - \alpha_i p_i}}$$

$S_i \quad i \neq j$

$$P(E_i \mid D_j^c) = \frac{P(D_j^c \mid E_i)\, P(E_i)}{1 - P(D_j)}$$

$$= \boxed{\frac{\alpha_i}{1 - \alpha_j p_j}}$$

p

$$P(D_k) = P(D_k \mid E_k)\, P(E_k)$$