

MA3403-4. Probabilidades y Estadística**Profesor:** Raúl Gouet**Auxiliares:** Vicente Salinas**Fecha:** 10 de septiembre de 2021**Auxiliar 3: Probabilidad Condicionada**

- P1.** La cuarta parte de una población se vacuna para prevenir una enfermedad contagiosa. Durante la epidemia observamos que hay, entre los enfermos, un vacunado por cada cuatro no vacunados. Además, observamos que, entre los vacunados, uno de cada doce está enfermo. ¿Cuál es la probabilidad de contagiarse para un individuo no vacunado?
- P2.** Un laboratorio que esta desarrollando la vacuna para el COVID-19 tiene dos máquinas A y B. El 54% de las vacunas producidas son hechas por la máquina A y el resto por la máquina B. No todas las vacunas producidas son efectivas. La proporción de vacunas efectivas hechas por A es 0,8 y por B es 0,5.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que al aplicar una vacuna esta sea efectiva?
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo que una vacuna no hizo efecto, proceda de la máquina A?
- P3.** En una urna inicialmente vacía se echan dos bolas, que pueden ser ambas blancas, ambas negras o una y una con probabilidad $1/4$, $1/4$ y $1/2$ respectivamente. Luego, de forma independiente, se lanza una moneda equilibrada y si sale cara se agrega una bola negra pero si sale sello no se hace nada.
- a) Calcule la probabilidad de que la urna contenga alguna bola negra.
 - b) Se extrae una bola al azar de la urna. Calcule la probabilidad de que sea negra.
 - c) **[Bonus Utilizar Bayes]** Sabiendo que la bola extraída en la parte anterior fue negra, calcule la probabilidad de que la moneda haya salido cara.
- P4.** La probabilidad de que un fósforo en buen estado efectivamente encienda cuando se intenta prender es $0 < p < 1$, independiente de los otros intentos, mientras que un fósforo en mal estado nunca enciende. De una caja con n fósforos buenos y m malos usted extrae uno al azar.
- a) Si en el primer intento el fósforo no prende, determine la probabilidad de que éste malo.
 - b) Suponiendo que no enciende en el primer intento, determine la probabilidad que encienda en el siguiente intento.

Resumen

Definición 1 (Prob. Condicionada). Dados dos eventos A, B , se define la probabilidad condicionada de A dado B (cuando $\mathbb{P}(B) \neq 0$), como

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Propiedades 1. *Dados dos eventos A y B , se cumple*

1. Si $E_1, E_2, E_3, \dots$ son eventos mutuamente excluyentes

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} E_i | F) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i | F)$$

2. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$ (regla de la multiplicación)

Teorema 1 (Bayes). *Dados dos eventos A, B , se tiene que*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Teorema 2 (Probabilidades Totales). *Dada una colección de eventos $\{A_1, \dots, A_n\}$ mutuamente excluyentes que particionan el espacio muestral, se cumple que, dado cualquier evento B ,*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

Propuestos

Prop 1 Una mujer embarazada decide hacerse una ecografía para conocer el sexo de su futuro hijo.

Se sabe que la probabilidad de que la ecografía diga que es hombre cuando en realidad es hombre, es de un 99 %, y que la probabilidad que diga que es mujer cuando en realidad es mujer es de un 90 %. Suponga que antes de la ecografía las probabilidades de hombre y mujer son iguales a 50 %.

- a) Si la ecografía predice que ser a mujer ¿Cuál es la probabilidad que efectivamente lo sea?
- b) Calcule la probabilidad de que la ecografía se equivoque al predecir el sexo.

Prop 2 Hay dos fábricas de radios. Cada radio producida en la fábrica A sale defectuosa con probabilidad 0,05, mientras que una producida en la fábrica B sale defectuosa con probabilidad 0,01 (independiente de las otras radios producidas). Usted compra dos radios que provienen de la misma fábrica, la cual puede ser A ó B con la misma probabilidad.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera radio que usted revisa salga defectuosa?
- b) Si la primera radio revisada salió defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda también lo esté?

P1. La cuarta parte de una población se vacuna para prevenir una enfermedad contagiosa. Durante la epidemia observamos que hay, entre los enfermos, un vacunado por cada cuatro no vacunados. Además, observamos que, entre los vacunados, uno de cada doce está enfermo. ¿Cuál es la probabilidad de contagiarse para un individuo no vacunado?

$$P(V) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(NV) = \frac{3}{4}$$

E: Enfermos

$$P(V|E) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(NV|E) = \frac{4}{5}$$

YA pasó

~~$$P(V|NE) = \frac{4}{5}$$~~

$$P(E|V) = \frac{1}{12} \Rightarrow P(NE|V) = \frac{11}{12}$$

$$P(E|NV) ?$$

$$P(E|NV) \stackrel{\text{bayes}}{=} \frac{P(NV|E) P(E)}{P(NV)}$$

El anterior

$P(E)$ = No la conozco
pero me gustaría Agregarle hipótesis

$$\begin{aligned} P(E) & \overset{\text{Totales}}{=} P(E|V)P(V) + P(E|NV)P(NV) \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} + \underbrace{P(E|NV)}_X \cdot \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{12} + 3X \right) \end{aligned}$$

↙

$$X = \frac{\frac{1}{3} \cdot P(E)}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{12} + 3X \right)}{\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}X = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{12} + 3X \right) \quad / \cdot 20$$

$$\Rightarrow 15x = \frac{1}{3} + 12x$$

$$x = \frac{1}{9} = P(E|NV)$$

P2. Un laboratorio que está desarrollando la vacuna para el COVID-19 tiene dos máquinas A y B. El 54% de las vacunas producidas son hechas por la máquina A y el resto por la máquina B. No todas las vacunas producidas son efectivas. La proporción de vacunas efectivas hechas por A es 0,8 y por B es 0,5.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al aplicar una vacuna esta sea efectiva?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo que una vacuna no hizo efecto, proceda de la máquina A?

$$P(A) = \frac{54}{100} \Rightarrow P(B) = \frac{46}{100}$$

$$P(E|A) = 0.8 \Rightarrow P(E^c|A) = 0.2$$

$$P(E|B) = 0.5 \Rightarrow P(E^c|B) = 0.5$$

$$a) P(E)^{T.O.T, les} = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B)$$

$$= 0.8 \cdot \frac{54}{100} + 0.5 \cdot \frac{46}{100}$$

$$P(E) = \frac{1}{100} \left(\frac{0.8 \cdot 54}{43.2} + 23 \right)$$

$$= \frac{66.2}{100} = \boxed{0.662}$$

$$b) P(A | E^c) \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{P(E^c | A) \cdot P(A)}{P(E^c)}$$

$$= \frac{P(E^c | A) P(A)}{1 - P(E)}$$

$$= \frac{0.2 \cdot \frac{59}{100}}{0.338}$$

$$P(A | E^c) = 0.31952$$

P3. En una urna inicialmente vacía se echan dos bolas, que pueden ser ambas blancas, ambas negras o una y una con probabilidad $1/4$, $1/4$ y $1/2$ respectivamente. Luego, de forma independiente, se lanza una moneda equilibrada y si sale cara se agrega una bola negra pero si sale sello no se hace nada.

- Calcule la probabilidad de que la urna contenga alguna bola negra.
- Se extrae una bola al azar de la urna. Calcule la probabilidad de que sea negra.
- [Bonus Utilizar Bayes] Sabiendo que la bola extraída en la parte anterior fue negra, calcule la probabilidad de que la moneda haya salido cara.

$$P(BB) = \frac{1}{4} = P(NN)$$

$$P(BN) = \frac{1}{2}$$

$$P(S) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(S) = P(S|BB) = P(S|NN) = P(S|BN)$$

$$P(N) = P(C|BB) = P(C|NN) = P(C|BN)$$

$$\frac{P(S \cap BB)}{P(BB)} = \frac{P(S) \cancel{P(BB)}}{\cancel{P(BB)}}$$

(Pasa lo mismo con $S \cap NN$ y $S \cap BN$)

$$P(S|BB) = P(S)$$

S_i sale cara $\Rightarrow S_e$ agrega 1 N

S_i sale sello $\Rightarrow N_0$ pasa a la

N_i : Al final hay i bolitas negras

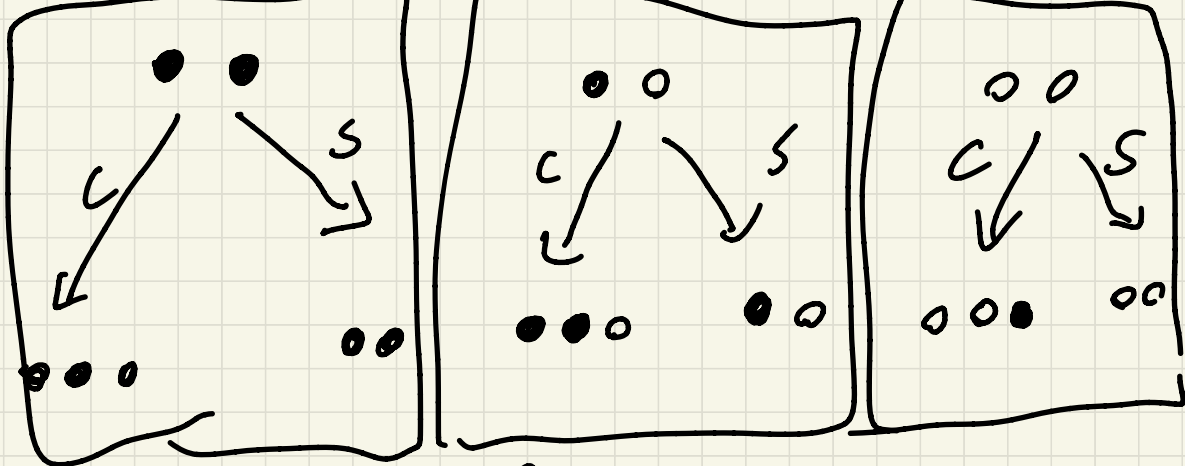
$$\Omega = N_0 \cup N_1 \cup N_2 \cup N_3$$

$$a) L = N_1 \cup N_2 \cup N_3$$

$$L^c = N_0$$

$$P(L) = ?$$

$$P(L) = 1 - P(L^c)$$



$$P(N_0) = P(N_0 | NN) \cdot P(NN) + P(N_0 | BN) \cdot P(BN) + P(N_0 | BB) \cdot P(BB)$$

Como las monedas
son independientes del otro

$$P(N_0 | BB) = P(S)$$

$$P(N_0) = P(S) \cdot P(BB)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$P(L) = \frac{7}{8}$$

P. Totals 1

$$\begin{aligned}
 b) \quad P(EN) &= \overbrace{P(EN|NN \cap L)}^1 P(NN \cap L) + \overbrace{P(EN|NN \cap S)}^1 P(NN \cap S) + \\
 &\quad \overbrace{P(EN|BN \cap L)}^{2/3} P(BN \cap L) + \overbrace{P(EN|BN \cap S)}^{1/2} P(BN \cap S) + \\
 &\quad \overbrace{P(EN|BB \cap L)}^{1/3} P(BB \cap L) + P(EN|BB \cap S) P(BB \cap S)
 \end{aligned}$$

○

Independence

$$P(NN \cap L) = P(NN)P(L)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + 0$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{6+4+3+1}{24} = \boxed{\frac{7}{12}}$$

$$P(EB) = 1 - P(EN) = \boxed{\frac{5}{12}}$$

$$c) P(C|EN) = \frac{P(EN|C) \cdot P(C)}{P(EN)}$$

$$P(EN|C) \stackrel{\text{DEF}}{=} \frac{P(EN, C)}{P(C)} \quad (1)$$

Teiles

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) \\ &\quad + \dots + P(A|B_n)P(B_n) \\ &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots \\ &\quad \dots + P(A \cap B_n) \end{aligned}$$

(1) Teiles intersection

$$P(E|C) \cdot P(C) = P(E|C, NN) + \\ P(E|C, NB) + \\ P(E|C, BB)$$

$$= P(E|C, NN) \cdot P(C) \cdot P(NN) + \\ P(E|C, NB) \cdot P(C) \cdot P(NB) + \\ P(E|C, BB) \cdot P(C) \cdot P(BB)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \right)$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P(E|C) = \frac{2}{3}$$

$$P(C|EN) = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{12}} = \frac{\frac{12}{7} \cdot \frac{1}{8}}$$

$$P(C|EN) = \boxed{\frac{4}{7}}$$

P4. La probabilidad de que un fósforo en buen estado efectivamente encienda cuando se intenta prender es $0 < p < 1$, independiente de los otros intentos, mientras que un fósforo en mal estado nunca enciende. De una caja con n fósforos buenos y m malos usted extrae uno al azar.

a) Si en el primer intento el fósforo no prende, determine la probabilidad de que éste malo.

b) Suponiendo que no enciende en el primer intento, determine la probabilidad que encienda en el siguiente intento.

$$P(B) = \frac{N}{N+m}$$

$$P(M) = \frac{m}{N+m}$$

$$P(E_i | M) = 0 \Rightarrow P(E_i^c | M) = 1$$

$$P(E_1 | B) = p \Rightarrow P(E_1^c | B) = 1-p$$

$$P(E_2 | B) = p \Rightarrow P(E_2^c | B) = 1-p$$

$$P(E_i | B) = p \Rightarrow P(E_i^c | B) = 1-p$$

$$\begin{aligned} P(E_2 \cap E_1 | B) &= \overset{\text{independencia}}{P(E_2 | B) \cdot P(E_1 | B)} \\ &= p^2 \end{aligned}$$

$$a) P(M | E_1^c) = \frac{P(E_1^c | M) P(M)}{P(E_1^c)}$$

$$P(E_1^c) \stackrel{\text{Total}}{=} P(E_1^c | B) P(B) + P(E_1^c | M) P(M)$$

$$= (1-p) \frac{N}{N+m} + 1 \cdot \frac{m}{N+m}$$

$$= \frac{N(1-p) + m}{N+m}$$

$$P(M | E_1^c) = \frac{1 \cdot \frac{m}{N+m}}{\frac{N(1-p) + m}{N+m}} = \boxed{\frac{m}{N(1-p) + m}}$$

$$b) P(E_2 | E_1^c) = \frac{P(E_2 \cap E_1^c)}{P(E_1^c)}$$

$$\begin{aligned} & \text{Total} \\ &= P(E_2, E_1^c | \beta) P(\beta) + P(E_2, E_1^c | \alpha) P(\alpha) \\ &= \frac{N(1-p) + m}{N+m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Total} \\ &= \frac{P(E_2 | \beta) \cdot P(E_1^c | \beta) \cdot P(\beta)}{\frac{N(1-p) + m}{N+m}} \end{aligned}$$

$$P(E_2 | E_1^c) = \boxed{\frac{p \cdot (1-p) \cdot N}{N(1-p) + m}}$$

Prop 1 Una mujer embarazada decide hacerse una ecografía para conocer el sexo de su futuro hijo.

Se sabe que la probabilidad de que la ecografía diga que es hombre cuando en realidad es hombre, es de un 99%, y que la probabilidad de que diga que es mujer cuando en realidad es mujer es de un 90%. Suponga que antes de la ecografía las probabilidades de hombre y mujer son iguales a 50%.

a) Si la ecografía predice que ser a mujer ¿Cuál es la probabilidad que efectivamente lo sea?

b) Calcule la probabilidad de que la ecografía se equivoque al predecir el sexo.

$$P(DH|H) = 0.99 \Rightarrow \underline{P(DM|H) = 0.01}$$

$$\underline{P(DM|M) = 0.9}$$

$$P(M) = P(H) = 0.5$$

$$\begin{aligned} a) P(M|DM) &= \frac{P(DM|M)P(M)}{P(DM)} \\ &= \frac{0.9 \cdot \frac{1}{2}}{0.9 \cdot \frac{1}{2} + 0.01 \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \boxed{\frac{90}{91}} \end{aligned}$$

Totales

$$P(E_{\text{guaranteed}}) = P(E_{\text{guaranteed}} | M_{\text{ajer}}) P(M) + \\ P(E_{\text{guaranteed}} | H) P(H)$$

$$= P(DH | M) P(M) + \\ P(DM | H) P(H)$$

$$= 0.1 \cdot \frac{1}{2} + 0.01 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \boxed{0.055}$$

Prop 2 Hay dos fábricas de radios. Cada radio producida en la fábrica A sale defectuosa con probabilidad 0.05, mientras que una producida en la fábrica B sale defectuosa con probabilidad 0.01 (independiente de las otras radios producidas). Usted compra dos radios que provienen de la misma fábrica, la cual puede ser A ó B con la misma probabilidad.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera radio que usted revisa salga defectuosa?

b) Si la primera radio revisada salió defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda también lo esté?

$$P(D_1 | A) = 0.05$$

$$P(D_1 | B) = 0.01$$

$$P(D_1 \cap D_2 | A) = P(D_1 | A) P(D_2 | A)$$

Lo mismo con B

~~$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) P(D_2)$$~~

No necesariamente

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} a) P(D_1) &= P(D_1 | A) P(A) + P(D_1 | B) P(B) \\ &= \frac{1}{2} (0.05 + 0.01) = \boxed{0.03} \end{aligned}$$

$$b) P(D_2 | D_1) = \frac{P(D_2 \cap D_1)}{P(D_1)}$$

Totals

$$= \frac{P(D_2 \cap D_1 | A) P(A) + P(D_2 \cap D_1 | \bar{A}) P(\bar{A})}{P(D_1)}$$

$$= \frac{(0.05)^2 + (0.01)^2}{0.051} \cdot \frac{1}{2}$$