

**MA3403-4. Probabilidades y Estadística**

**Profesor:** Raúl Gouet

**Auxiliares:** Vicente Salinas

**Fecha:** 24 de septiembre de 2021



**Auxiliar 4: Combinatoria y Probabilidad Condicional**

**Definición 1** (Prob. Condicionada). Dados dos eventos  $A, B$ , se define la probabilidad condicionada de  $A$  dado  $B$  (cuando  $\mathbb{P}(B) \neq 0$ ), como

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

**Propiedades 1** (Prob. condicionada). *Dados dos eventos  $A$  y  $B$ , se cumple*

1. Si  $E_1, E_2, E_3, \dots$  son eventos mutuamente excluyentes

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} E_i | F) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i | F)$$

2.  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$  (regla de la multiplicación)

**Teorema 1** (Bayes). *Dados dos eventos  $A, B$ , se tiene que*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

**Teorema 2** (Probabilidades Totales). *Dada una colección de eventos  $\{A_1, \dots, A_n\}$  mutuamente excluyentes que particionan el espacio muestral, se cumple que, dado cualquier evento  $B$ ,*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

**P1.** Se dispone de dos monedas, una equilibrada y la otra con probabilidad  $2/3$  de cara. Se escoge al azar una de las dos monedas, y se lanza dos veces. Sea  $C_i$  el evento en que el lanzamiento  $i$  resulta cara, para  $i = 1, 2$ . ¿Son independientes los eventos  $C_1$  y  $C_2$ ? Explique.

**P2. (Monty Hall)**

Suponga que usted está en un concurso de televisión en donde tiene que elegir una de 3 puertas  $P_1, P_2$  y  $P_3$ . Atrás de una de ellos hay un millonario premio, mientras que las otras dos hay cabras. La producción del programa hizo la repartición de las cabras y el premio de forma aleatoria.

Usted elige la puerta 1, y el animador (que ya sabe lo que hay detrás de cada puerta, por lo que no abrirá la puerta en la que está el premio) abre la puerta 3 que contenía una cabra. Luego, el animador le ofrece cambiar a la puerta 2. **¿Le conviene cambiar de puerta, o es mejor mantenerse con la puerta 1?** Asuma que el animador escoge al azar cual puerta abrir entre las que usted no eligió y no contienen el premio.

**P3.** Un grupo de 4 alumnos  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_4$  debe realizar una tarea que consta de 12 problemas (enumerados de 1 a 12). Debido al semestre on line, encuentran que va a ser difícil resolver en conjunto los problemas, por lo que deciden repartirse los problemas para resolver cada uno 3 problemas de forma independiente.

- i) ¿De cuántas maneras se pueden repartir los problemas?
- ii) ¿Cual es la probabilidad de que al alumno  $p_1$  le toque hacer problemas consecutivos?
- iii) ¿Cual es la probabilidad que a todos les toque hacer problemas consecutivos?

**P4.** Un fugitivo se encuentra en una de  $n$  zonas (no conectadas entre si). La probabilidad de que se encuentre en la  $i$ -ésima zona es  $p_i$  y si esta ahí, se le encuentra con probabilidad  $\alpha_i$ .

- a.1) Si se hace una búsqueda en todas la zonas, determine la probabilidad de encontrarlo.
- a.2) Si se le busca en todas las zonas y no se encuentra, determine la probabilidad de que éste en la zona 1.
  - b) (**Bonus**) Se buscó en la zona  $j$  y no se le encontró. Calcule la probabilidad que éste en la zona  $i$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ .