MA3403-4. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 3 de septiembre de 2021

Auxiliar 2: Combinatoria

P1. Se deben repartir turnos de trabajo para $2n$ trabajadores. Existen 2 tipos de turnos, los n turnos de día y n turnos de noche, De los $2n$ trabajadores, $0 < a < n$ prefieren el turno de día y $0 < b < n$ prefieren el de noche. El resto es indiferente para trabajar de día o de noche. Si los turnos se reparten al azar y solo uno por persona, determine la probabilidad de que a cada persona le corresponda un turno de su preferencia.

P2. Una mano de poker son 5 cartas escogidas al azar entre 52 cartas de un naipe inglés.

(a) Si las cartas tienen números consecutivos y no todas tienen la misma pinta se dice que la mano es una escalera. Por ejemplo $5\spadesuit, 6\clubsuit, 7\heartsuit, 8\diamondsuit, 9\spadesuit$ es una escalera. También lo es $10\diamondsuit, J\heartsuit, Q\diamondsuit, K\spadesuit, A\clubsuit$. Los ases pueden comenzar o terminar una escalera, pero no pueden ir al medio.

Por ejemplo, $Q\diamondsuit, K\heartsuit, A\diamondsuit, 1\spadesuit, 2\clubsuit$ no es una escalera. ¿Cual es la probabilidad de obtener una escalera?

(b) Un full corresponde a una mano donde hay un par y un trío, sin importar la pinta de estos. Por ejemplo, $2\diamondsuit, 2\heartsuit, 5\diamondsuit, 5\spadesuit, 5\clubsuit$ es un full. ¿Cual es la probabilidad de obtener un full?

P3. Un examen consta de 14 temas. Se debe escoger un tema de entre 2 tomados al azar. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que un alumno que ha preparado 8 temas le toque al menos uno que sabe.

b) ¿Cuál es el número mínimo de temas que debe preparar para que tenga una probabilidad superior a $\frac{1}{2}$ de superar el examen?

P4. Se dispone de un revólver con capacidad para $n \in \mathbb{N}$ balas y se insertan $k \in \{0, ..., n\}$ al azar. Dos personas juegan a la ruleta rusa, girando la nuez después de cada disparo.

a) Calcule la probabilidad de que el jugador que comienza disparando muera.

b) Evalúe en $n = 6, k = 1$.

c) ¿Cómo deben ser n y k para que el juego sea equilibrado?

Resumen

Principio del Multiplicación: Si un hecho puede realizarse de n_1 maneras diferentes y si una vez realizado ´este se sabe que otro hecho puede realizarse de n_2 maneras diferentes, entonces el número de maneras diferentes que puede realizarse ambos a la vez, en este orden, es $n_1 n_2$ maneras diferentes. En general $N_{total} = n_1 n_2 ... n_k$

Permutaciones Simples: Son las diferentes ordenaciones que pueden hacerse con n elementos distinguibles, de tamaño r, donde los objetos se pueden usar sólo una vez.

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Obs: Usualmente se le llama permutación al caso especial $r = n$ donde: $P_n = n!$

Permutaciones con elementos repetidos: Si se tienen n elementos divididos en k grupos, con n_i: cant. de objetos tipo i, tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. El total de permutaciones posibles es: $\dfrac{n!}{n_1!n_2!....n_k!}$

Combinaciones: Dada una agrupación de n elementos, la cantidad de subconjuntos de k elementos de dicha agrupación está dada por:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Obs: El número total de subconjuntos no vacíos que se pueden formar es: $2^n - 1$

Combinaciones con repetición: La cantidad de formas de escoger un conjunto de k elementos dentro de un total de n con repetición está dada por:

$$C_{n-1+k}^k = \binom{n+k-1}{k}$$

[**Propuesto**]

Prop 1 Calcule cuántos números de cuatro dígitos se pueden formar con las cifras $0, 1, ..., 9$, para los siguientes casos. Permitiendo repeticiones. Sin repeticiones. Si el último dígito debe ser 0 y no se permiten repeticiones.

Prop 2 Una torre es una pieza de ajedrez que puede atacar a piezas en su misma fila o columna. Dos torres son indistinguibles si no puedo diferenciar a qué lado del tablero atacan, por lo tanto, es posible que se ataquen entre si.

a) Sea $k \in \mathbb{N}$ ¿ De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero rectangular de $k \times k$ casilleros de modo tal que ninguna torre pueda atacar a otra?

b) Sean $k, n \in \mathbb{N}$ ¿De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero rectangular de $n \times n$ casilleros de manera tal que ninguna torre pueda atacar a otra?

c) Sean $k, n, m \in \mathbb{N}$ ¿De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero de $n \times m$ casilleros de manera tal que ninguna torre pueda atacar a otra?

P1. Se deben repartir turnos de trabajo para $2n$ trabajadores. Existen 2 tipos de turnos, los n turnos de día y n turnos de noche, De los $2n$ trabajadores, $0 < a < n$ prefieren el turno de día y $0 < b < n$ prefieren el de noche. El resto es indiferente para trabajar de día o de noche. Si los turnos se reparten al azar y solo uno por persona, determine la probabilidad de que a cada persona le corresponda un turno de su preferencia.

5 Alumnos en la sala

2 dulces

$$5^2$$

Valido si: se pueden comer mas de un dulce

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5!}{(5-2)!}$$

Si solo 1 por persona

Dulces iguales

Meto los 5 nombres en una tombola

¿$5 \cdot 4$? no ✓

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = \binom{5}{2} \begin{matrix} \to \text{Opciones} \\ \to \text{Las que escoja} \end{matrix}$$

Vamos a usar la formula

$$P(A) = \frac{|\text{Casos Favorables}|}{|\text{Casos Totales}|}$$

$|\text{Casos Totales}|$ = Al repartir empleos de día

No me importa el orden

$$= \binom{2N}{N} \begin{matrix} \to \text{Candidatos} \\ \to \text{empleos} \end{matrix}$$

No me falta nada, pues el resto o de noche

Casos Favorables: a personas trabajando día

$\Rightarrow$ Ahora solo tengo $2N-a$ candidatos

Todos — Menos los listos

$\Rightarrow$ quiero repartir $N-a$ empleos de día

$\binom{2N-a}{N-a}$ (Casi listo pero falta los b que trabajan de noche)

$\Rightarrow$ Vamos a fijar los b de noche

$\Rightarrow$ Ahora hay $2N-a-b$ candidatos para el turno de día

Cuantos tenemos empleo de día

$N-a-\cancel{b}$ (de noche)

$\Rightarrow \binom{2N-a-b \to \text{operarios}}{N-a \to \text{empleos}}$ Maneras $\dfrac{(2N-a-b)!}{(N-a)!(N-b)!}$

$$P(\text{Todos Felices}) = \frac{\binom{2N-a-b}{N-a}}{\binom{2N}{N}}$$ (No es necesario multiplicar)

P2. Una mano de poker son 5 cartas escogidas al azar entre 52 cartas de un naipe inglés.

(a) Si las cartas tienen números consecutivos y no todas tienen la misma pinta se dice que la mano es una escalera. Por ejemplo $5\spadesuit, 6\clubsuit, 7\heartsuit, 8\diamondsuit, 9\spadesuit$ es una escalera. También lo es $10\diamondsuit, J\heartsuit, Q\diamondsuit, K\spadesuit, A\clubsuit$. Los ases pueden comenzar o terminar una escalera, pero no pueden ir al medio.
Por ejemplo, $Q\diamondsuit, K\heartsuit, A\diamondsuit, 1\spadesuit, 2\clubsuit$ no es una escalera. ¿Cual es la probabilidad de obtener una escalera?

(b) Un full corresponde a una mano donde hay un par y un trío, sin importar la pinta de estos. Por ejemplo, $2\diamondsuit, 2\heartsuit, 5\diamondsuit, 5\spadesuit, 5\clubsuit$ es un full. ¿Cual es la probabilidad de obtener un full?

a) Probabilidad $= \dfrac{|CF|}{|CT|}$

Casos Totales

$$\binom{52}{5} \begin{matrix} \to \text{Opciones} \\ \to \text{tamaño} \end{matrix}$$

No importa el orden

$\cancel{52! \cdot 51! \cdot 50! \cdot 49! \cdot 48!}$

Casos Favorables

A 2 3 4 5

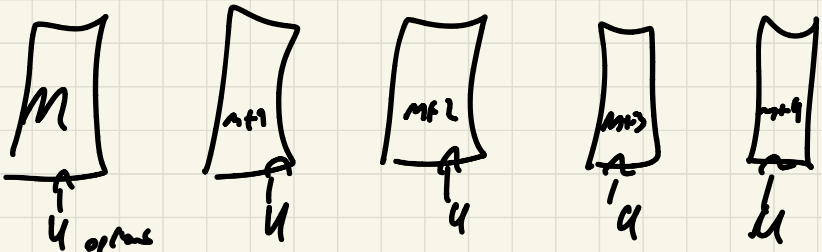
2 3 4 5 6

⋮

10 J Q K A

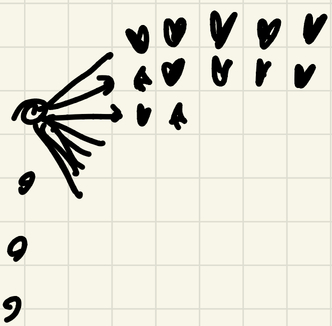
J ~~Q K A~~ 1

¿Cuántas opciones numéricas de escala hay? $\boxed{10}$



¿Opciones para los palos? 4^5

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Finalmente } 10\cdot 4^5 \text{ escalas posibles}}$



1 2 3 4 5 Tiene 4^5

2 3 4 5 6 Tiene 4^5

⋮

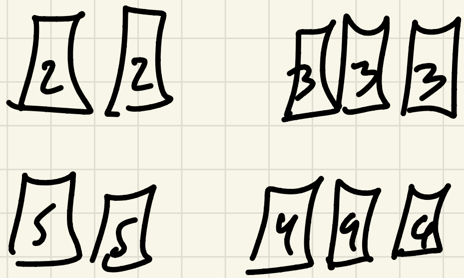
10 J Q K A " 4^5

$\Big\}\ 10\cdot 4^5$

$$\boxed{P(a) = \frac{10 \cdot 4^5}{\binom{52}{4}}}$$

b) Casos Totales ✓

Casos Favorables



$$\frac{13 \cdot \cancel{12}^{\,6}}{2} = \binom{13}{2}$$

13 → opciones

2 → Tomo 2

$$13 \cdot 12 = 2\binom{13}{2}$$ Formas de sacar los numeros

$\binom{13}{2}$ → Escoger 2 números

2 → quien es Par

↳ quien es Trio

Tengo 13 números → 2 puestos diferentes (importa el orden)

$\Rightarrow 13 \cdot 12$

$\downarrow$ el par $\downarrow$ el trío

De cuantas formas podemos pintar el trío

$\boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2} \rightarrow 4$

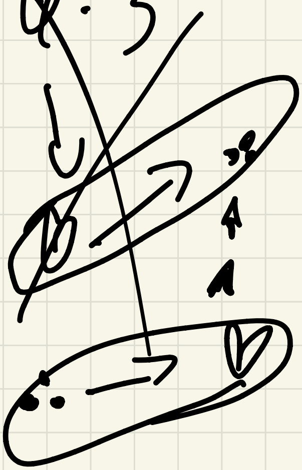
$\cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 = 24}$ 4

$$\binom{4}{3} \begin{matrix} \rightarrow \text{Opciones de palo} \\ \rightarrow \text{Escojo} \end{matrix} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \boxed{4}$$

Para el par de cuantas formas se pinta

$$\cancel{12 =} \binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3\cdot \cancel{2!}}{2!\cdot \cancel{2!}} = 6$$

$4\cdot 3$



P3. Un examen consta de 14 temas. Se debe escoger un tema de entre 2 tomados al azar. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que un alumno que ha preparado 8 temas le toque al menos uno que sabe.

b) ¿Cuál es el número mínimo de temas que debe preparar para que tenga una probabilidad superior a $\frac{1}{2}$ de superar el examen?

$$P(\quad) = \frac{|CF|}{|CT|}$$

$CT = \binom{14}{2}$ y no $\cancel{14 \cdot 13}$

CF al menos (Preparado tema saco 1 o saco 2)

Hacemos complemento

Es decir no saco ninguna

No sabe 6

$$\Rightarrow \binom{6}{2} \begin{array}{l} \to \text{No sabe} \\ \to \text{Escoge} \end{array}$$

(No importa el orden)

$$P(a) = \left(1 - \frac{\binom{6}{2}}{\binom{14}{2}}\right)$$

$$= \frac{\binom{14}{2} - \binom{6}{2}}{\binom{14}{2}}$$

b) Cual es la prob preparando K Temas

Solo cambia el $\binom{6}{2}$ por un

$\binom{14-K}{2}$ $\to$ No sabe, $\to$ Escoge

$$\Rightarrow P(B) = 1 - \frac{\binom{14-K}{2}}{\binom{14}{2}}$$

$\binom{14-K}{2} \to \frac{(14-K)(13-K)}{2}$

$\binom{14}{2} \to \frac{14 \cdot 13}{2}$

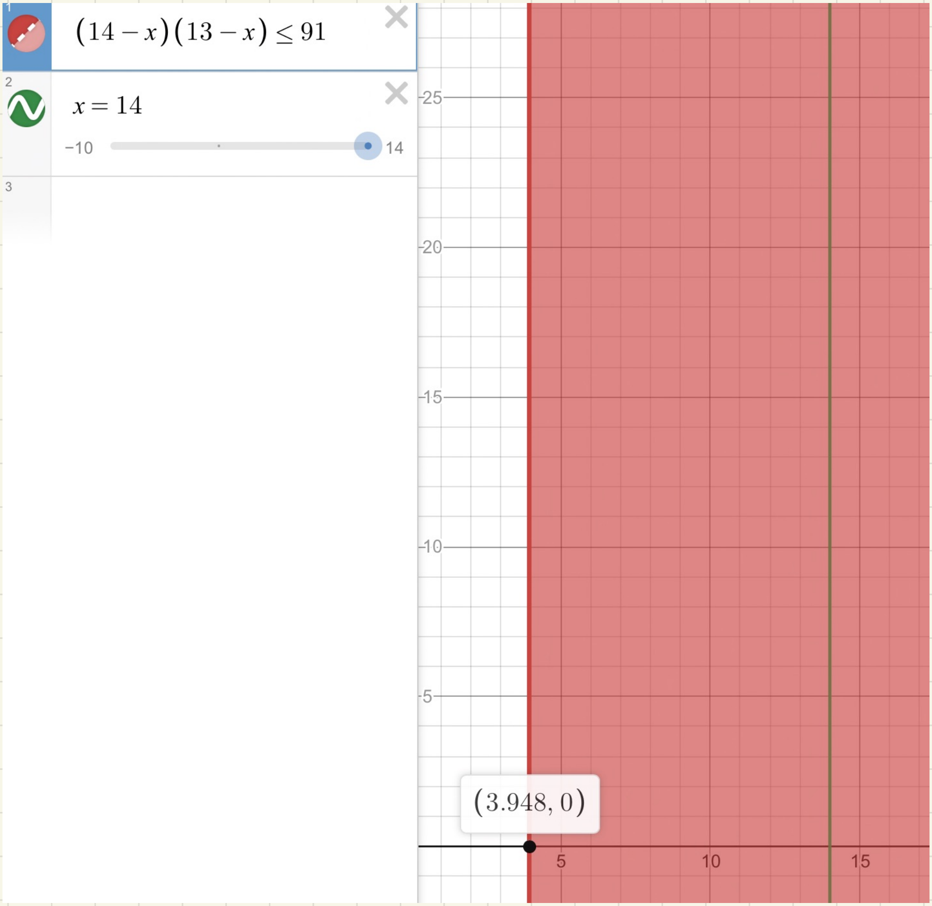
$$= 1 - \frac{(14-K)(13-K)}{14 \cdot 13}$$

$$\Rightarrow \boxed{1 - \frac{(14-K)(13-K)}{14 \cdot 13} \geq \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{7 \cdot 13}_{91} \geq (14-K)(13-K)$$

Para $K \geq 4$ la prob es $\geq \frac{1}{2}$

⇒ Mínimo hay que preparar 4 Temas



P4. Se dispone de un revólver con capacidad para $n \in \mathbb{N}$ balas y se insertan $k \in \{0, ..., n\}$ al azar. Dos personas juegan a la ruleta rusa, girando la nuez después de cada disparo.

a) Calcule la probabilidad de que el jugador que comienza disparando muera.

b) Evalúe en $n = 6, k = 1$.

c) ¿Cómo deben ser n y k para que el juego sea equilibrado?

M_i : Muere el jugador del Turno i

M_1 : En el 1er disparo sale la bala

$$P(M_1) = \frac{K}{N}$$

$$P(M_2) = \underbrace{\left(\frac{N-K}{N}\right)}_{\text{No muere 1}} \cdot \left(\frac{K}{N}\right)$$

$$P(M_3) = \left(\frac{N-K}{N}\right)^2 \cdot \left(\frac{K}{N}\right)$$

$$P(M_r) = \left(\frac{N-K}{N}\right)^{r-1} \left(\frac{K}{N}\right)$$

$$M^{1^{er}} = M_1 \cup M_3 \cup M_5 \cup \ldots \cup M_{2i+1}$$

que muera
el que parte

$$P(M^{1^{er}}) = P\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} M_{2i+1}\right)$$

Son disjuntos

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P(M_{2i+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{N-K}{N}\right)^{2i+1\cancel{-1}} \left(\frac{K}{N}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\left(\frac{N-K}{N}\right)^2\right)^K \cdot \left(\frac{K}{N}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

$$= \left(\frac{K}{N}\right) \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{N-K}{N}\right)^2}$$

$$P(M^{1st}) = \frac{KN}{N^2 - (N-K)^2}$$

$$(N^2 - 2NK + K^2)$$

$$= \boxed{\frac{N}{2N-K}}$$

b) $N = 6$ y $K = 1$

$$\Rightarrow P(M^{1st}) = \frac{6}{12 \cdot 1} = \boxed{\frac{6}{11}}$$

c) $\frac{N}{2N-K} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 2N = 2N - K$

$$\Longleftrightarrow \boxed{K = 0}$$

Idea: Siempre que se juego con al menos 1 bola el primero Tiene desventaja

Prop 1 Calcule cuántos números de cuatro dígitos se pueden formar con las cifras $0, 1, \ldots, 9$, para los siguientes casos. Permitiendo repeticiones. Sin repeticiones. Si el último dígito debe ser 0 y no se permiten repeticiones.

a) Permitir repeticiones

$\cancel{10} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \Rightarrow \boxed{9 \cdot 10^3}$

→ 9

Solo 9 pues el 0 no puede partir

b) sin repetir

$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \boxed{9^2 \cdot 8 \cdot 7}$

No puede ser 0

Todas menos el 1er dígito

Menos 1er y 2do

9)

_ _ _ 0

7

Ni 0 ni el 1ro => $\boxed{9 \cdot 8 \cdot 7}$ ✗

9 opciones 8

Prop 2 Una torre es una pieza de ajedrez que puede atacar a piezas en su misma fila o columna. Dos torres son indistinguibles si no puedo diferenciar a qué lado del tablero atacan, por lo tanto, es posible que se ataquen entre si.

a) Sea $k \in \mathbb{N}$ ¿ De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero rectangular de $k \times k$ casilleros de modo tal que ninguna torre pueda atacar a otra?

b) Sean $k, n \in \mathbb{N}$ ¿De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero rectangular de $n \times n$ casilleros de manera tal que ninguna torre pueda atacar a otra?

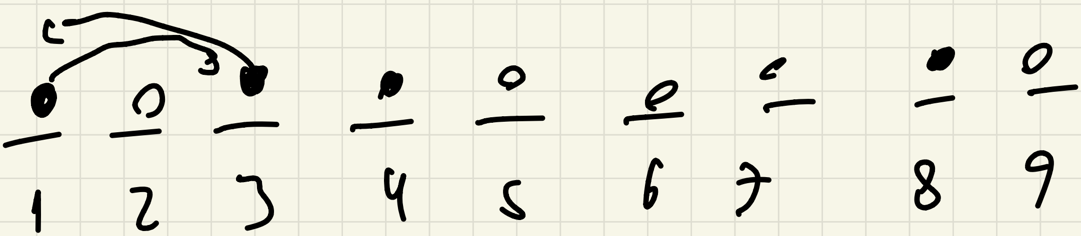
c) Sean $k, n, m \in \mathbb{N}$ ¿De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero de $n \times m$ casilleros de manera tal que ninguna torre pueda atacar a otra?

ordenar 1's y 0's

ordenar • y o , por ejemplo

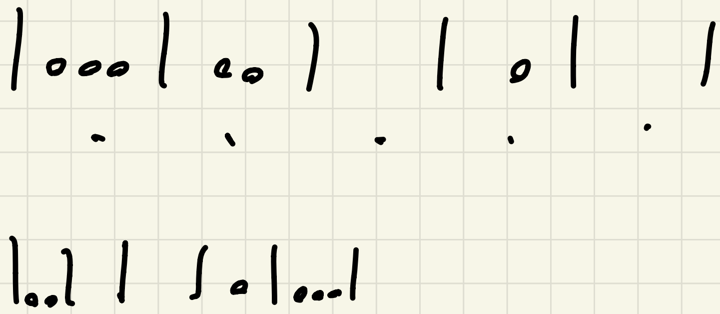
ordenar N palotitos blancos y m negros

en una fila de largo N+m

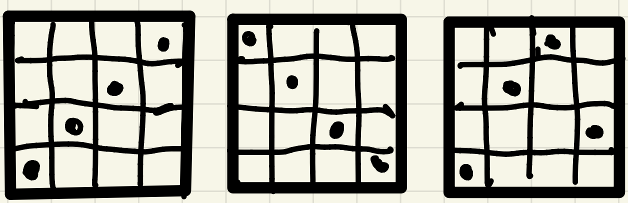


escoger N numeros de N+m posibles

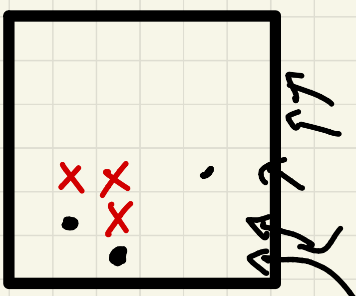
$$\binom{N+m}{N}$$



a)



$K = 4$



1 opciones

⋮

$K-2$ opciones

$K-1$ opciones

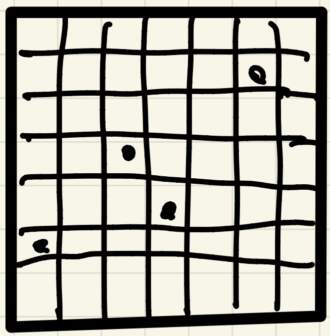
Tengo K opciones

$\Rightarrow K!$ formas de acomodarlos

b) Si $N < K \Rightarrow$ imposible

Si $K = N$ ✓

Si $K < N$



$K = 4$

$N - K$ vacías

K con 1 torre

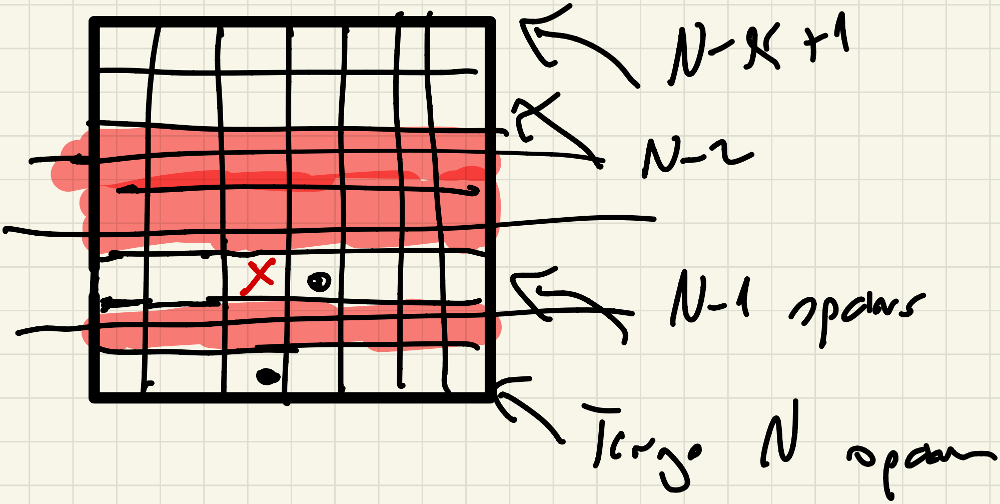
Tenemos N filas escogemos

K que llevan torres

$$\Rightarrow \binom{N}{K}$$

Sucede lo mismo que antes

1ra fila opciones

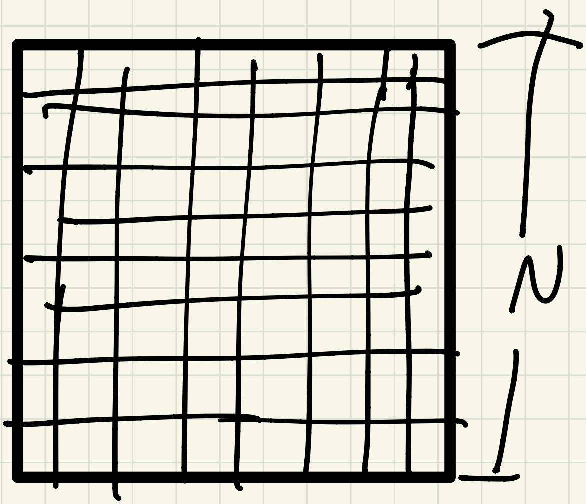


Hay

$$\Rightarrow \binom{N}{K} \cdot N\cdot(N-1)(N-2)\dots(N-K+1)$$

$$= \binom{N}{K}\frac{N!}{(N-K)!} = \frac{N\cdot(N-1)\dots(N-K+1)\cancel{(N-K)!}}{\cancel{(N-K)!}}$$

c)



$|\text{———} m \text{———}|$

Si N o M alguno es menor que K

$\Rightarrow$ Imposible

$\boxed{N \geq K \quad y \quad m \geq K}$

Primero escogemos que K filas llevan torre (Hay N filas)

$$= \binom{N}{K} \cdot m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-K+1)$$

$$= \binom{N}{K} \frac{m!}{(m-K)!} = \frac{N!}{(N-K)!\,K!} \cdot \frac{m!}{(m-K)!}$$

$$= \frac{N!}{(N-K)!} \cdot \binom{m}{K}$$