MA3403-4. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 3 de septiembre de 2021

Auxiliar 2: Combinatoria

P1. Se deben repartir turnos de trabajo para $2n$ trabajadores. Existen 2 tipos de turnos, los n turnos de día y n turnos de noche, De los $2n$ trabajadores, $0 < a < n$ prefieren el turno de día y $0 < b < n$ prefieren el de noche. El resto es indiferente para trabajar de día o de noche. Si los turnos se reparten al azar y solo uno por persona, determine la probabilidad de que a cada persona le corresponda un turno de su preferencia.

P2. Una mano de poker son 5 cartas escogidas al azar entre 52 cartas de un naipe inglés.

(a) Si las cartas tienen números consecutivos y no todas tienen la misma pinta se dice que la mano es una escalera. Por ejemplo $5\spadesuit, 6\clubsuit, 7\heartsuit, 8\diamondsuit, 9\spadesuit$ es una escalera. También lo es $10\diamondsuit, J\heartsuit, Q\diamondsuit, K\spadesuit, A\clubsuit$. Los ases pueden comenzar o terminar una escalera, pero no pueden ir al medio.
Por ejemplo, $Q\diamondsuit, K\heartsuit, A\diamondsuit, 1\spadesuit, 2\clubsuit$ no es una escalera. ¿Cual es la probabilidad de obtener una escalera?

(b) Un full corresponde a una mano donde hay un par y un trío, sin importar la pinta de estos. Por ejemplo, $2\diamondsuit, 2\heartsuit, 5\diamondsuit, 5\spadesuit, 5\clubsuit$ es un full. ¿Cual es la probabilidad de obtener un full?

P3. Un examen consta de 14 temas. Se debe escoger un tema de entre 2 tomados al azar. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que un alumno que ha preparado 8 temas le toque al menos uno que sabe.

b) ¿Cuál es el número mínimo de temas que debe preparar para que tenga una probabilidad superior a $\frac{1}{2}$ de superar el examen?

P4. Se dispone de un revólver con capacidad para $n \in \mathbb{N}$ balas y se insertan $k \in \{0, ..., n\}$ al azar. Dos personas juegan a la ruleta rusa, girando la nuez después de cada disparo.

a) Calcule la probabilidad de que el jugador que comienza disparando muera.

b) Evalúe en $n = 6, k = 1$.

c) ¿Cómo deben ser n y k para que el juego sea equilibrado?

Resumen

Principio del Multiplicación: Si un hecho puede realizarse de n_1 maneras diferentes y si una vez realizado ´este se sabe que otro hecho puede realizarse de n_2 maneras diferentes, entonces el número de maneras diferentes que puede realizarse ambos a la vez, en este orden, es $n_1 n_2$ maneras diferentes. En general $N_{total} = n_1 n_2 ... n_k$

Permutaciones Simples: Son las diferentes ordenaciones que pueden hacerse con n elementos distinguibles, de tamaño r, donde los objetos se pueden usar sólo una vez.

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Obs: Usualmente se le llama permutación al caso especial $r = n$ donde: $P_n = n!$

Permutaciones con elementos repetidos: Si se tienen n elementos divididos en k grupos, con n_i: cant. de objetos tipo i, tal que $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. El total de permutaciones posibles es: $\dfrac{n!}{n_1! n_2! .... n_k!}$

Combinaciones: Dada una agrupación de n elementos, la cantidad de subconjuntos de k elementos de dicha agrupación está dada por:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Obs: El número total de subconjuntos no vacíos que se pueden formar es: $2^n - 1$

Combinaciones con repetición: La cantidad de formas de escoger un conjunto de k elementos dentro de un total de n con repetición está dada por:

$$C_{n-1+k}^k = \binom{n+k-1}{k}$$

[Propuesto]

Prop 1 Calcule cuántos números de cuatro dígitos se pueden formar con las cifras $0, 1, ..., 9$, para los siguientes casos. Permitiendo repeticiones. Sin repeticiones. Si el último dígito debe ser 0 y no se permiten repeticiones.

Prop 2 Una torre es una pieza de ajedrez que puede atacar a piezas en su misma fila o columna. Dos torres son indistinguibles si no puedo diferenciar a qué lado del tablero atacan, por lo tanto, es posible que se ataquen entre si.

a) Sea $k \in \mathbb{N}$ ¿ De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero rectangular de $k \times k$ casilleros de modo tal que ninguna torre pueda atacar a otra?

b) Sean $k, n \in \mathbb{N}$ ¿De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero rectangular de $n \times n$ casilleros de manera tal que ninguna torre pueda atacar a otra?

c) Sean $k, n, m \in \mathbb{N}$ ¿De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero de $n \times m$ casilleros de manera tal que ninguna torre pueda atacar a otra?