MA3403-4. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 27 de agosto de 2021

Auxiliar 1: Axiomas y Conjuntos II

P1. Para esta pregunta y todo el auxiliar, considere (Ω, P). Usando los axiomas deduzca las siguientes propiedades:

a) Compruebe que $\mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$

b) Sea $A \subseteq \Omega$ un evento tal que $\mathbb{P}(A) = 1$. Pruebe que para cualquier otro evento $B \subseteq \Omega$, se tiene que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$.

P2. Considere el siguiente experimento: Reordenar, de manera aleatoria, los dígitos 1, 2 y 3.

a) Describa el espacio muestral asociado al experimento.

b) Para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ distintos calcule la probabilidad del evento $A_i = \{\text{El i-ésimo dígito es i}\} \subseteq \Omega$, luego calcule $\mathbb{P}(A_i \cap A_j)$ y finalmente la probabilidad de que al menos un dígito caiga en su posición correcta.

P3. La probabilidad de que una persona haya visto durante su infancia: Hannah Montana es 0,65 y de haber visto Dragon Ball Z 0,75. También se sabe que la probabilidad de que una persona haya visto ambas es 0,5,

a) Determine la probabilidad de que haya visto alguno de los dos programas.

b) Determine la probabilidad de solo haya visto Dragon Ball Z.

P4. Un grupo de personas, de tamaño $k \in N$, denotaremos a cada integrante como $\{1, ..., k\}$ va al cine. Si las personas k se sientan juntas en la misma fila, calcule el número de configuraciones posibles en las cuales se pueden sentar si:

a) Se pueden sentar como quieran.

b) Dos personas en particular se tienen que sentar juntas.

c) Dos personas no pueden sentarse juntas.

d) [**Propuesto**] Hay un grupo de tamaño $i \leq k$ que se tiene que sentar juntos.

Resumen

Definición 1. Una **probabilidad** $\mathbb{P}$ es una función $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ que cumple lo siguiente:

1. $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
3. Si $(A_n)_n$ son eventos tales que $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, entonces:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

igualdad

Proposición 1.
1. *Sea A un evento cualquiera, entonces $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.*
2. *$\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.*
3. *Sean A, B eventos cualesquiera, entonces $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.* (PIE)
4. *Si $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.* (Monótonia)

Definición 2. Supongamos que $|\Omega| < +\infty$. Diremos que Ω es **equiprobable** cuando

$$(\forall w \in \Omega)\mathbb{P}(\{w\}) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Además se cumple que: $(\forall A \subseteq \Omega)\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Proposición 2 (Principio Aditivo de Conteo)**.** *Sean E_1, E_2 dos experimentos disjuntos con $|E_1| = n$ y $|E_2| = m$. Entonces el numero de formas de realizar alguno de los dos experimentos viene dado por $n + m$.*

Proposición 3 (Principio Multiplicativo de Conteo)**.** *Sean E_1, E_2 dos experimentos disjuntos con $|E_1| = n$ y $|E_2| = m$. Entonces el numero de formas de realizar el primer experimento y luego el segundo experimento viene dada por $n \cdot m$.*

Proposición 4. *Sean $a_1, ..., a_n$ n objetos diferentes. Entonces la cantidad de formas de elegir k objetos de los n anteriores viene dada por:*

	Con Orden	Sin Orden
Con Reposición	n^k	$\binom{k+n-1}{n-1}$
Sin Reposición	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Proposición 5. *Suponga tenemos n objetos tales que hay n_1 objetos de tipo 1 indistinguibles entre si, n_2 objetos de tipo 2 indistinguibles entre si,..., n_k objetos de tipo k indistinguibles entre si. Entonces la cantidad de permutaciones de los n objetos viene dada por:*

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$$

[Propuesto]

Prop 1 La probabilidad que una persona viaje a Buenos Aires durante un año es de un 0,47, la probabilidad que viaje a Miami es de un 0,38 y la probabilidad que viaje a Madrid es de un 0,20. La probabilidad que viaje a Madrid y Buenos Aires es 0,07, que viaje a Madrid y Miami es 0,08, que viaje a Buenos Aires y Miami es 0,15 y la probabilidad que viaje a los 3 lugares es 0,05. Determine la probabilidad de que la persona:

a) Viaje a alguno de los lugares.
b) Viaje solo a Madrid.
c) Viaje solo a Madrid y Miami.

Prop 2 De un grupo de 5 mujeres y 7 hombres debe formarse un comité de 2 mujeres y 3 hombres. Determine cuántos posibles comités hay si:

a) No hay restricción.
b) Dos hombres están peleados y no pueden ser seleccionados ambos.
c) Hay un hombre y una mujer que son pareja y solo aceptaran ser parte del comité si se seleccionan a ambos.

P1. Para esta pregunta y todo el auxiliar, considere (Ω, P). Usando los axiomas deduzca las siguientes propiedades:

a) Compruebe que $\mathbb{P}((A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-2\mathbb{P}(A\cap B)$

b) Sea $A\subseteq\Omega$ un evento tal que $\mathbb{P}(A)=1$. Pruebe que para cualquier otro evento $B\subseteq\Omega$, se tiene que $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(B)$.

a)

3. Sean A, B eventos cualesquiera, entonces $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$.

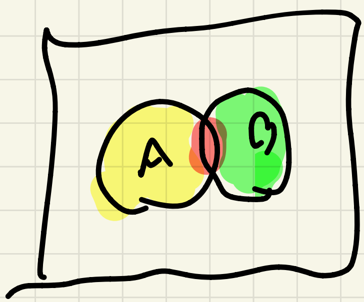
$$P((A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)) \overset{?}{=} P(A\cup B) - P(A\cap B)$$

$\boxed{\text{Aux}}$

$$(A\cap B^c)\cap(B\cap A^c) = \emptyset \;?$$

$B^c\cap A$ $\qquad$ $A^c\cap B$

$$\boxed{A\cap B^c \subseteq B^c}$$



$$B\cap A^c \subseteq B$$

$A\cap B$

Como $A\cap B$, $A\cap B^c$ y $B\cap A^c$

son disjuntos

$$\boxed{P\left((A\cap B)\cup(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)\right)} \overset{(3)}{=}$$

$$P(A\cap B)+P(A\cap B^c)+P(A^c\cap B) \overset{(3)}{=}$$

$$\boxed{P(A\cap B)+P\left((A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\right)}$$

Con esta idea

$$(A\cap B)\cup(A\cap B^c) = A\cap(B\cup B^c)$$

$$= A\cap\Omega = A$$

Prop

$$(A\cap B)\cup(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c) = A\cup B$$

(Hacer)

$$\Rightarrow P(A\cup B) = P(A\cap B)+P\left((A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\right)$$

PIE

$$\Rightarrow P(A)+P(B)-2P(A\cap B) = P\left((A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\right)$$

P2. Considere el siguiente experimento: Reordenar, de manera aleatoria, los dígitos 1, 2 y 3.

a) Describa el espacio muestral asociado al experimento.

b) Para $i, j \in \{1,2,3\}$ distintos calcule la probabilidad del evento $A_i = \{\text{El i-ésimo dígito es i}\} \subseteq \Omega$, luego calcule $\mathbb{P}(A_i \cap A_j)$ y finalmente la probabilidad de que al menos un dígito caiga en su posición correcta.

Reordenar tamaño fijo y sin repetir

$\{\ \}$, $(\ )$

↑ Conjuntos (sin orden)

↑ tuplas (con orden)

$$\Omega = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)\}$$

$$= \{(i,j,k) \mid i,j,k \in \{1,2,3\},\ i \neq j,\ i \neq k,\ j \neq k\}$$

b) A_1 : Que 1 sea el 1-ésimo

: $\{(1,2,3),(1,3,2)\}$

$$P(A_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$ → Casos Favorables → Casos Totales

$i \in \{1,2,3\}$

$$P(A_i) = \frac{1}{3} \neq P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

$$A_1 \cap A_2 = \{(1,2,3)\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$
$$= A_1 \cap A_3$$
$$= A_2 \cap A_3$$
$$= A_i \cap A_j$$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{6}$$

¿Al menos 1 digito en la posición correcta?

$$P\left(\left(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c\right)^c\right) \overset{\text{morgan}}{=} \underbrace{P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)}$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$
$$- P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3)$$
$$- P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

(PIE) Caso 3

$$= 1 - \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Prop $P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = \frac{1}{3}$

P3. La probabilidad de que una persona haya visto durante su infancia: Hannah Montana es 0,65 y de haber visto Dragon Ball Z 0,75. También se sabe que la probabilidad de que una persona haya visto ambas es 0,5,

a) Determine la probabilidad de que haya visto alguno de los dos programas.

b) Determine la probabilidad de solo haya visto Dragon Ball Z.

$P(HM) = 0.65 \Rightarrow P(HM^c) = 0.35$

$P(DB) = 0.75 \Rightarrow P(DB^c) = 0.25$

$P(HM \cap DB) = 0.5 \Rightarrow P(HM^c \cup DB^c) = 0.5$

a) ¿Qué significa alguno? (o lógico → en conjunto unión

$\Rightarrow P(HM \cup DB) = ?$

$$P(HM \cup DB) \overset{\text{PIE}}{=} P(HM) + P(DB) - P(HM \cap DB)$$

$$= 0.65 + 0.75 - 0.5$$

$$\boxed{P(HM \cup DB) = 0.9}$$

b) $P(DB \cap HM^c) = \ ? \ = P(DB \setminus HM)$

$P(DB \cap HM^c) = P(DB) - P(DB \cap HM)$

DATO $P(DB) = P(DB \cap HM) + P(DB \cap HM^c)$

es cierto porque son una partición de DB

$$\boxed{P(DB \cap HM^c) = 0.75 - 0.5 = 0.25}$$

P4. Un grupo de personas, de tamaño $k \in N$, denotaremos a cada integrante como $\{1, ..., k\}$ va al cine. Si las personas k se sientan juntas en la misma fila, calcule el número de configuraciones posibles en las cuales se pueden sentar si:

a) Se pueden sentar como quieran.

b) Dos personas en particular se tienen que sentar juntas.

c) Dos personas no pueden sentarse juntas.

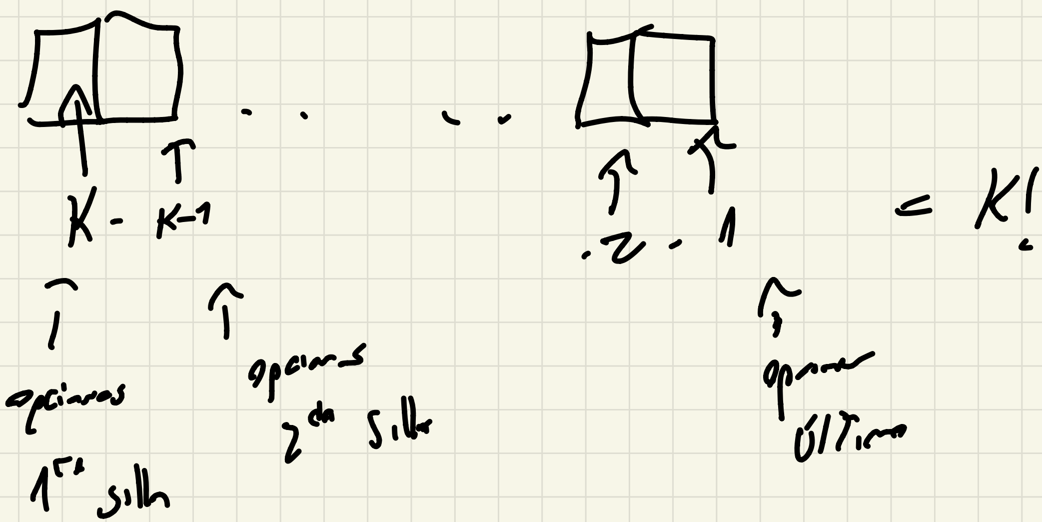
d) **[Propuesto]** Hay un grupo de tamaño $i \leq k$ que se tiene que sentar juntos.

a) $K! = K(K-1) \ldots (2) \cdot 1$

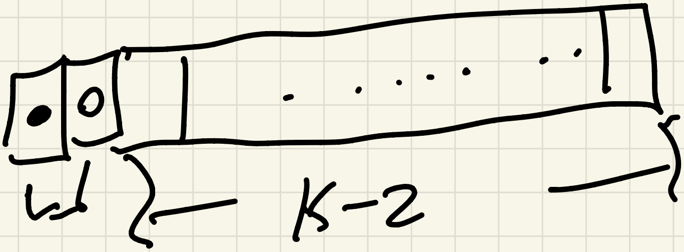
Por ej:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$0! = 1 = 1!$$

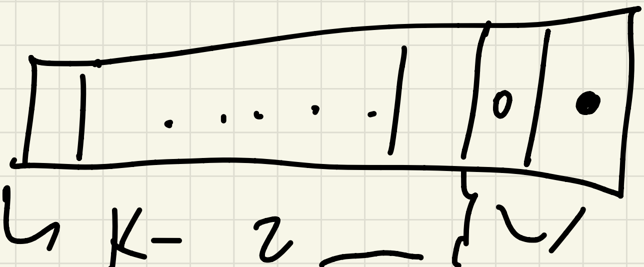


b)



Caso 1

1 · (K-2)! (P. multiplicativo)

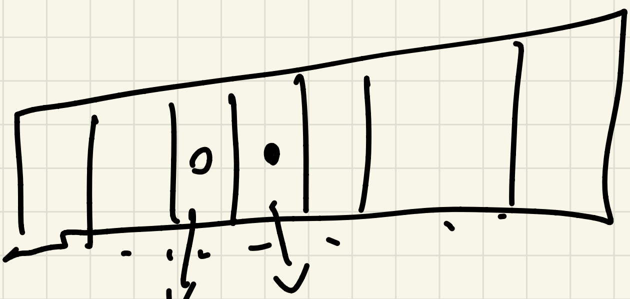


Caso 2

1 forma

(K-2)!

Caso 3



Tiene 2 opciones (Izq o der)

Tiene K-2 opciones (Posición)

Para el resto $(K-2)$ personas

Las ordenaremos y luego las sentaremos

de izq a der

$(K-2)!$

(P. multiplicativo) $\Rightarrow$ $(K-2)!\ (K-2)\ 2$

el resto   por •   por o

$$|b)| = |\text{Caso } 1| + |\text{Caso } 2| + |\text{Caso } 3|$$
$$= (K-2)! + (K-2)! + 2(K-2)(K-2)!$$
$$= 2(K-2)!\,(K-1) = \boxed{2(K-1)!}$$

(Son disjuntos fijarse donde esta •)

c) Total − 2 se sientan juntos

$$= \underset{(a)}{K!} - \underset{(b)}{2(K-1)!}$$

$$= (K-2)(K-1)!$$

d) opción 2 b)

K pelotitas

$$A \quad B \quad C \quad \ldots \quad K$$

$$\underbrace{A \quad \boxed{K} \quad D \quad E \quad F \quad \ldots \quad K}_{K-1}$$

$$(K-1)! \cdot 2 = 2(K-1)!$$

posicionar

Si es BC o CB

d)

$$\underbrace{o \dots \bullet \dots o}_{K-i+1}$$

Las puedo ordenar $(K-i+1)!$

entre las i personas hay $i!$

P. Multiplicativa

Tenemos $(K-i+1)! \cdot i!$ formas

Prop 1 La probabilidad que una persona viaje a Buenos Aires durante un año es de un 0,47, la probabilidad que viaje a Miami es de un 0,38 y la probabilidad que viaje a Madrid es de un 0,20. La probabilidad que viaje a Madrid y Buenos Aires es 0,07, que viaje a Madrid y Miami es 0,08, que viaje a Buenos Aires y Miami es 0,15 y la probabilidad que viaje a los 3 lugares es 0,05. Determine la probabilidad de que la persona:

a) Viaje a alguno de los lugares.

b) Viaje solo a Madrid.

c) Viaje solo a Madrid y Miami.

$P(BA) = 0.47$

$P(Mi) = 0.38$

$P(M_A) = 0.2$

$P(M_A \cap BA) = 0.07$

$P(M_A \cap Mi) = 0.08$

$P(BA \cap Mi) = 0.15$

$P(BA \cap Mi \cap M_A) = 0.05$

a) $P(B_A \cup Mi \cup M_A) = P(B_A) + P(M_i) + P(M_A) - P(B_A \cap Mi) - P(B_A \cap M_A) - P(M_A \cap M_i) + P(BA \cap Mi \cap M_A)$

$= 0.47 + 0.33 + 0.2$

$- 0.07 - 0.08 - 0.15$

$+ 0.05$

$= 0.7$

b) $P(M_A \cap B_A^c \cap M_i^c) = P(M_A \cap (B_A \cup M_i)^c)$

Ideas

$$P(M_A \cap (B_A^c \cap M_i^c)) = P(M_A \setminus (B_A \cup M_i))$$

$$\overset{\text{Rest}}{=} \underline{P(M_A)} - P(M_A \cap (B_A \cup M_i))$$

$$= P(M_A) - (P(\underbrace{(M_A \cap B_A)}_{X} \cup \underbrace{(M_i \cap M_A)}_{Y})))$$

PIE

$$= P(M_A) - P(M_A \cap B_A) - P(M_A \cap M_i) + P(M_A \cap M_i \cap B_A)$$

$$= 0.2 - 0.15 + 0.05 = \boxed{0.1}$$

c) $P(B_A^c \cap M_A \cap M_i) = P(M_A \cap M_i \cap B_A^c)$

$= P(M_A \cap M_i \setminus B_A)$

$= P(M_A \cap M_i) - P(M_A \cap M_i \cap B_A)$

$= 0.08 - 0.05 = \boxed{0.03}$

$$\boxed{* \; P(B_A^c \cap M_A \cap M_i) + P(B_A \cap M_A \cap M_i) = P(M_A \cap M_i)}$$

Prop 2 De un grupo de 5 mujeres y 7 hombres debe formarse un comité de 2 mujeres y 3 hombres. Determine cuántos posibles comités hay si:

a) No hay restricción.

b) Dos hombres están peleados y no pueden ser seleccionados ambos.

c) Hay un hombre y una mujer que son pareja y solo aceptaran ser parte del comité si se seleccionan a ambos.

a) $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!}$

Opciones de mujer

Posibilidades $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\cdot 4!}$

Cargos

Por P. Multiplicativo $= \binom{5}{2}\binom{7}{3}$

Caso 1 : Seleccionamos al primer hombre peleado

$\binom{6}{2}$ 6 → Solo quedan 6 hombres
2 → Solo puedo 2 parados

Mujeres siguen siendo $\binom{5}{2}$

$\Rightarrow \binom{6}{2}\binom{5}{2}$

<u>Caso 2</u> : Selecciono al 2^{do} hombre parado

Similar $\binom{6}{2}\binom{5}{2}$

<u>Caso 3</u> : No quiero a ningún parado

7-2 → $\binom{5}{3}\binom{5}{2}$

3 → No hay cargos usados

$$\Rightarrow |Caso| = 2\binom{6}{2}\binom{5}{2} + \binom{5}{3}\binom{5}{2}$$

$$\boxed{= \left[2\binom{6}{2} + \binom{5}{3}\right]\binom{5}{2}}$$

c) <u>Caso 1</u> (Esta la pareja)

⇒ Solo quedan 6 opciones de ♂ y 2 cargos

y 4 opciones de mujeres y 1 cargo

$$\Rightarrow \binom{6}{2}\underbrace{\binom{4}{1}}_{\parallel \atop 4}$$

<u>Caso 2</u> (No esta la pareja)

$\Rightarrow$ Solo hay 6 opciones de hombres para 3 cargos. Solo hay 4 mujeres para 2 carg

$$\Rightarrow \binom{6}{3}\binom{4}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Total} = \binom{6}{2}\binom{4}{1} + \binom{6}{3}\binom{4}{2}}$$