MA3403-4. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 25 de agosto de 2021

Auxiliar 0: Axiomas y Conjuntos

P1. Una caja contiene 3 pelotitas, 1 roja, 1 verde y 1 azul. Considere el experimento que consiste en sacar una pelotita, devolverla y luego sacar otra.

a) Describa el espacio muestral de este experimento.

b) ¿Como seria el espacio muestral si no se repone la pelotita luego de sacarla?

P2. En un experimento, un dado es lanzado hasta que un 6 aparece, momento en que se detiene el experimento.

a) ¿Cual es el espacio muestral?

b) Se define E_n como el evento en donde se necesitan n lanzamientos del dado para que termine el experimento. Calcule el valor del tamaño de E_n con respecto al experimento y por ultimo, ¿qué significa $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c$ en términos de conjuntos?

P3. Sea $(\Omega, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad:

a) Sean A y B sucesos en este espacio tales que $\mathbb{P}(A \cup B) = P(A \cap B)$. Pruebe que: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

b) Decimos que la colección de eventos $(A_i)_{i=1}^N \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una partición de Ω si: $\bigcup_{i=1}^{N} A_i = \Omega$ y $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$.

Para una partición, pruebe que debe existir un $i \in \{1, ..., N\}$ tal que $P(A_i) \leq \dfrac{1}{N}$

c) Pruebe que debe existir un $i \in \{1, ..., N\}$ tal que $P(A_i) \geq \dfrac{1}{N}$

P1. Una caja contiene 3 pelotitas, 1 roja, 1 verde y 1 azul. Considere el experimento que consiste en sacar una pelotita, devolverla y luego sacar otra.

a) Describa el espacio muestral de este experimento.

b) ¿Como seria el espacio muestral si no se repone la pelotita luego de sacarla?

a) $\Omega = \{(R,R), (R,V), (R,A), (V,R), (V,A), (V,V), (A,R), (A,V), (A,A)\}$

$(1,2) \neq (2,1)$, $\{1,2\} = \{2,1\}$

Hay orden

2-tuplas

No hay orden

Conjuntos

$= \{(i,j) : i,j \in \{R,V,A\}\}$

b) $\Omega' = \{(R,A), (R,V), (V,A), (V,R), (A,R), (A,V)\}$

$= \{(i,j) : i \neq j \ , \ i,j \in \{R,V,A\}\}$

P2. En un experimento, un dado es lanzado hasta que un 6 aparece, momento en que se detiene el experimento.

a) ¿Cual es el espacio muestral?

b) Se define E_n como el evento en donde se necesitan n lanzamientos del dado para que termine el experimento. Calcule el valor del tamaño de E_n con respecto al experimento y por ultimo, ¿qué significa $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c$ en términos de conjuntos?

a) $\Omega = \{(6), (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (1,2,6), (1,1,6) \ldots \ldots \}$

$= \{$ Son todas las n-tuplas con n-1 elementos de $\{1,2,3,4,5\}$ y al final un 6 $\}$

$$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{ (i_1, \ldots, i_{n-1}, 6), \text{ tal que } i_1, \ldots, i_{n-1} \in \{1,2,3,4,5\} \}$$

b) E_n: Conjuntos de tuplas de largo n con su primer 6 al final

$(i_1, \ldots, i_{n-1}, 6)$

$$|E_N| = \underbrace{S \cdot S \cdot S \cdots S}_{N-1} = S^{N-1}$$

$\underset{\downarrow}{N-1}$

S^{N-1}

$\bigcup_{N=1}^{\infty} E_N$: Unión de los conjuntos de tuplas de largo $N \in \mathbb{N}$ con su primer 6 en la posición N

$= \Omega$

$$\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} E_N \right)^C = \emptyset \text{ , es el vacío}$$

P3. Sea $(\Omega, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad:

a) Sean A y B sucesos en este espacio tales que $\mathbb{P}(A \cup B) = P(A \cap B)$. Pruebe que: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

b) Decimos que la colección de eventos $(A_i)_{i=1}^{N} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una partición de Ω si: $\bigcup_{i=1}^{N} A_i = \Omega$ y $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$.

Para una partición, pruebe que debe existir un $i \in \{1, ..., N\}$ tal que $P(A_i) \leq \frac{1}{N}$

c) Pruebe que debe existir un $i \in \{1, ..., N\}$ tal que $P(A_i) \geq \frac{1}{N}$

Monótonia

$$X \subset Y$$

$$P(X) \leq P(Y)$$

a) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$

$A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(B) \leq P(A \cup B)$

Por

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) = P(B) = P(A \cup B)$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{i=1}^{N} P(A_i) \quad \left(\begin{array}{l}\text{Es cierto} \\ \text{si } A_i \cap A_j = \emptyset\end{array}\right)$$

Como $\bigcup_{i=1}^{N} A_i = \Omega$

$$\Rightarrow P(\Omega) = 1 = P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} P(A_i)$$

b) Supongamos que $\forall i \quad P(A_i) > \frac{1}{N}$

$$\sum_{i=1}^{N} P(A_i) > \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} = 1 \quad \not\longrightarrow \text{ es igual a } 1$$

$$\Rightarrow \exists \, i \text{ tal que } P(A_i) \leq \frac{1}{N}$$

c) Propuesta por contradicción

$$\sum_{i=1}^{N} P(A_{i_{max}}) \geq \sum_{i=1}^{N} P(A_i) = 1$$

$$\parallel$$

$$P(A_{i_{max}}) \cdot N \geq 1 \Rightarrow P(A_{max}) \geq \frac{1}{N}$$

Por lo que existe alguno