Auxiliar 10

T.C.V Multidimensional y T.C.L.

Profesor: Felipe Tobar
Auxiliares: Yeniffer Muñoz, Francisco Vásquez

Resumen:

- **Teorema de C.V. Multidimensional**
  1. Sea (X,Y) V.A.'s continuo con densidad conjunta $f_{X,Y}$. Sea (U,V) $= h(X,Y)$, tal que h es a derivada continua y Jacobiano distinto de 0, si además es inyectiva:
  $$f_{U,V}(u,v) = \frac{f_{X,Y}(h^{-1}(u,v))}{|det(J_h(h^{-1}(u,v))|}$$
  $$= |det(J_{h^{-1}}(u,v))| f_{X,Y}(h^{-1}(u,v))$$
  2. Sean X, Y variables aleatorias continuas independientes, entonces:
  $$f_{X+Y}(z) = f_X * f_Y(z)$$
  $$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$$
- **Normal Multivariada**
  1. **Parámetros:** $\mu = [\mu_1, \ldots, \mu_n]^T$ vector de medias, Σ matriz de covarianza (matriz real definida positiva de dimensión $n \times n$)
  2. **Función de densidad (pdf)**:
  $$f_X(\vec{x}) = \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)}}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}}$$
- **Desigualdad de Chebyshev**

  Sea X variable aleatoria de media μ y varianza finita σ^2, entonces, para todo número real $\varepsilon > 0$:
  $$\mathbb{P}(|X-\mu| \geq \varepsilon\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$
- **Teorema central del límite (T.C.L.)**

  Sean $X_1, ..., X_n$ v.a.'s i.i.d.. Sean $\mu = \mathbb{E}(X_i)$, $\sigma^2 = Var(X_i)$ la esperanza y varianza respectivamente. Sea $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, entonces $\mathbb{E}(S_n) = n\mu$, $Var(S_n) = n\sigma^2$, y:
  $$\lim_{n\to\infty} Z_n := \frac{(S_n - n\mu)}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0,1)$$
  $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq t) = \phi(t)$$
  con $\phi(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$, $X \sim N(0,1)$, (valor que se obtiene de la tabla).

P1.- **[Cambio de Variable Multidimensional y Convolución]**

Sean X, Y variables aleatorias independientes con $X \sim$ Exponencial(λ), $Y \sim$ Uniforme$(-\pi,\pi)$. Sean $U = \sqrt{X}\cos(Y)$, $V = \sqrt{X}\sin(Y)$.

1. Encuentre la densidad conjunta $f_{U,V}$ de U y V . ¿Son independientes?
2. Determine la densidad de $U+V$. **Hint:** Puede serle útil saber que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

$\boxed{\textbf{P2.-}}$ **[V.A. Normal Bivariada]**

Sea (X, Y) un vector aleatorio normal bivariado con función de densidad:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-1}{2}(2x^2+y^2+2xy)}$$

1. Determine las funciones de densidad marginales f_X, f_Y.
2. Calcule la correlación $\text{Corr}(X, Y)$.

$\boxed{\textbf{P3.-}}$ **[Desigualdad de Chebyshev y T.C.L.]**

Un astrónomo quiere conocer la distancia d (en años luz) que hay desde la Tierra a una lejana estrella. Para medir esta distancia el astrónomo dispone de un instrumento adecuado, pero debido a variaciones en las condiciones atmosféricas, el valor obtenido en cada medición no corresponde a la distancia exacta, sino a una variable aleatoria con esperanza d y varianza 4. Por esta razón, el astrónomo planea tomar n mediciones independientes, y estimar d usando el promedio. Encuentre el mínimo valor de n tal que, con probabilidad de al menos un 95 %, su estimación tiene un error de a lo más $\pm 0,5$ años luz:

1. Utilizando la desigualdad de Chebyshev.
2. Utilizando TCL.