Auxiliar 13

El amargo final: Modelos Lineales

Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Bruno Hernández, Sebastián López

1. Las observaciones Y_{ij}, con $i = 1...r$; $j = 1...n$ obedecen el modelo lineal $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$, donde ε_{ij} son errores centrados, no correlacionados y de varianza común σ^2.

   a) Escriba el modelo en su forma matricial $Y = X\beta + \varepsilon$ y argumente por qué el modelo no es de rango completo.

   b) Recordando que el modelo de rango incompleto no tiene solución única para las ecuaciones normales, se propone estimar β mediante el método MC pero incorporando la restricción $\sum_i \tau_i = 0$.
   Muestre que los estimadores son $\hat{\mu} = \bar{Y}$ y $\hat{\tau}_i = \bar{Y}_i - \bar{Y}$.

2. Considere el modelo lineal de rango completo $Y = X\beta + \varepsilon$, donde los errores son centrados y no correlacionados. Suponga que las variables explicativas son ortogonales, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}x_{ik} = 0 \quad \forall j \neq k$$

   Muestre que si se omiten algunas variables explicativas del modelo (es decir, algunas coordenadas de las observaciones x_i), entonces el estimador de mínimos cuadrados para las variables *no-olvidadas* es insesgado.

3. Suponga que el vector aleatorio $Y \in \mathbb{R}^n$ obedece al modelo lineal:

$$Y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon$$

   donde $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times k_1}$, $X_2 \in \mathbb{R}^{n\times k_2}$ y los errores son centrados, no correlacionados y de varianza común.
   Suponga que por un error humano, se olvidan de utilizar la información de X_2, y se procede a estimar β_1 mediante mínimos cuadrados con las variables restantes X_1. Muestre que el estimador resultante es sesgado para β_1.
   Ahora sea X_1^* la matriz cuya columna j es el vector de residuos del modelo $Z = X_2\beta_2 + \varphi$, donde Z es la columna j de la matriz X_1. Muestre que el estimador de MCO de β_1 en el modelo $Y = X_1^*\beta_1 + \delta$ es insesgado para β_1.