Auxiliar 6

Intervalos de Confianza

Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Bruno Hernández, Sebastián López

Definición.- Se dice que una v.a. tiene distribución χ^2 con n grados de libertad si es absolutamente continua respecto a la densidad dada por

$$f(t) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} t^{(n-2)/2} e^{-t/2} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t)$$

Definición.- Se dice que una v.a. tiene distribución Γ con parámetros α, β si es absolutamente continua respecto a la densidad dada por

$$f(t) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-t/\beta} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t)$$

1. Sea $X = (X_1, ..., X_n)$ una MAS de un modelo paramétrico $\{\mathbb{P}_\theta | \theta \in \Theta\}$ con $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, $\Theta = (0, \infty)$ tal que $\mathbb{P}_\theta$ admite densidad $f(x, \theta)$, cuyo soporte no depende de θ. Para $x \in \mathcal{X}; \theta, h \in \Theta$ tales que $f(x, \theta) > 0$ se define:
$$r(x, \theta, h) := \frac{f(x, \theta + h) - f(x, \theta)}{f(x, \theta)}$$
Sea $I_{\theta,h} = \mathbb{E}_\theta(r(X, \theta, h)^2)$ y $\hat{\theta}(X)$ un estimador insesgado de θ con varianza finita.
    - Demuestre que:
    $$Var_\theta(\hat{\theta}(X)) \geq \frac{h^2}{I_{\theta,h}} \quad \forall \theta, h \in \Theta$$
    - Calcule $I_{\theta,h}$ para una MAS del modelo uniforme en el intervalo $[0, \theta], \theta > 0$.
    - A partir del resultado anterior, calcule:
    $$\lim_{h \to 0^+} \frac{I_{\theta,h}}{h^2}$$

2. Sea $X_1, ..., X_n$ una MAS de una distribución exponencial de media θ.
    - Muestre que el estadístico $T(X) = 2\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{\theta}$ es una cantidad pivotal y que tiene distribución χ^2 con $2n$ grados de libertad.
    - Use la cantidad pivotal de la parte anterior para determinar un intervalo de confianza del 95 % para θ.
    - Si para una muestra de tamaño $n = 7$ se obtiene $\overline{X} = 4,77$, use el resultado anterior para encontrar un intervalo de confianza del 95 % para θ.