Auxiliar 9

Profesor: Raúl Gormaz
Auxiliar: Edgardo Rosas

P1. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2Ax}{\ell} & \text{si} \quad 0 < x < \frac{\ell}{2}; \\ \\ A & \text{si} \quad \frac{\ell}{2} < x < \ell. \end{cases} \tag{1}$$

Calcule su serie de Fourier

P2. Sea $\mathcal{F}\{f(x)\}(s) = \hat{f}(s)$ la transformada de fourier de la función real $f(x)$.

(a) Demuestre que $\mathcal{F}\{xf(x)\} = i\frac{d\hat{f}}{ds}(s)$

(b) Demuestre que $\mathcal{F}\{\frac{df}{dx}(x)\} = is\hat{f}(s)$

(c) Consierando que $\hat{f}(0) = 1$, calcule la transformada de Fourier de una función Gaussiana dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \tag{2}$$

P3. La función $\text{rect}(x)$ es ampliamente utilizada en ingeniería y ciencias. Es por ejemplo la manera analítica de representar un pozo potencial en mecánica cuántica. Su definición está dada por la expresión

$$\text{rect}(\tfrac{x}{\ell}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [-\ell/2, \ell/2]; \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [-\ell/2, \ell/2]. \end{cases} \tag{3}$$

Calcule su transformada de Fourier.

P4. **[Propuesto]**Considere una barra de largo ℓ, cuyo perfil de temperatura inicialmente está dado por

$$T(x,0) = \begin{cases} T_0 & \text{si} \quad 0 < x < \frac{\ell}{2}; \\ \\ 0 & \text{si} \quad \frac{\ell}{2} < x < \ell. \end{cases} \tag{4}$$

Si la evolución temporal de la barra en cada punto de ella está gobernado por la ecuación del calor, es decir,

$$\partial_t T(x,t) = \kappa \partial_x^2 T(x,t), \tag{5}$$

con κ una constante. Considerando además que los extremos de la barra se ponen en contacto con un material refrigerante que mantiene la temperatura en temperatura nula, encuentre el campo de temperatura $T(x,t)$.