

Auxiliar 7

Profesor: Raúl Gormaz

Auxiliar: Edgardo Rosas

P1. Considere la función definida por tramos en el intervalo $(-\ell, +\ell)$, dada por la expresión

$$f(x) = \begin{cases} +C & \text{si } 0 < x < \ell; \\ -C & \text{si } -\ell < x < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Calcule la expansión en serie de Fourier para la función f .

P2. Considere el siguiente problema en derivadas parciales.

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) - \beta v(x, t) \quad \forall x \in [-\pi, \pi], \forall t > 0 \quad (2a)$$

$$v(0, t) = v(\pi, t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad (2b)$$

$$v(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \quad (2c)$$

- (a) Demuestre que este problema tiene solución única.
- (b) Mediante el cambio de variable $u(x, t) = e^{-\beta t}v(x, t)$ obtenga un problema en derivadas parciales para $u(x, t)$.
- (c) usando la parte anterior obtenga la solución para el problema en derivadas parciales de $v(x, t)$ considerando

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi; \\ -1 & \text{si } -\pi < x < 0. \end{cases} \quad (3)$$

- (d) **[Propuesto]** Grafique la función $v(x, t)$

P3. [Propuesto] Una barra metálica de largo ℓ es puesta en el vacío con una distribución de temperatura inicial dada por $T(x, t = 0) = T_0 \frac{x}{\ell} (1 - \frac{x}{\ell})$, $T_0 \in \mathbb{R}$. Encuentre el campo de temperatura $T(x, t)$ si dicho campo satisface la ecuación de difusión (4) con condiciones de borde nula tipo Neumann ($\partial_x u(x = \{0, \ell\}, t) = 0$), y coeficiente de difusividad térmica κ .

$$\partial_t u(x, t) = \kappa \partial_x^2 u(x, t) \quad (4)$$

P4. [Propuesto] Considere una cuerda de largo ℓ que tiene un extremo fijo y otro libre. Suponga que la cuerda se suelta justo después de dejarla preparada en la forma $u(x, t = 0) = d_0 \frac{x}{\ell} (1 - \frac{x}{\ell})$, $d_0 \in \mathbb{R}$. Determine el campo desplazamiento $u(x, t)$ de la cuerda, si dicho campo satisface la ecuación de ondas lineal 1D (5) con velocidad de propagación c .

$$\partial_t^2 u(x, t) = c^2 \partial_x^2 u(x, t) \quad (5)$$