Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Auxiliar 6

Profesor: Raúl Gormaz
Auxiliar: Edgardo Rosas

P1. Al interior de un cilindro vertical de radio $R = 1$ fluye un líquido cuyo campo de velocidades queda descrito en coordenadas cilíndricas como

$$\mathbf{u}(\rho, \theta, z) = g(\rho)\hat{\mathbf{z}}, \tag{1}$$

en dónde la función $g(\rho)$ está dada por la expresión

$$g(\rho) = \begin{cases} \rho - \rho^2 & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq \rho < 1 \\ \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad 0 \leq \rho < \frac{1}{4} \end{cases} \tag{2}$$

(a) Grafique $g(\rho)$ para $\rho \in [0, 1]$. Estudie la continuidad y la diferenciabilidad de $\mathbf{u}(\rho, \theta, z)$

(b) Verifique que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

(c) Calcule el flujo de $\mathbf{u}$ a través del disco $D_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1, \ z = 0\}$ considerando la normal que apunta hacia arriba.

(d) Sea Ω_m la porción del cilíndro encerrada entre los planos $z = 0$ y $z = my + H$ ($H > 0$ dado). Haga un bosquejo de Ω_m. Calcule el valor del flujo de $\mathbf{u}$ sobre la cara superior de Ω_m.

P2. **[Propuesto]**Considere el campo dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right). \tag{3}$$

(a) Muestre que el campo de la Ec. (3) se puede escribir en coordenadas cilíndricas como

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + z\hat{\theta} + z\hat{\mathbf{z}}. \tag{4}$$

(b) Si Γ es la intersección entre entre una esfera centrada en el origen de radio R y el plano $z = H$, calcule la integral de trabajo $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ considerando la orientación positiva de Γ mirandola desde arriba.

(c) ¿Es $\mathbf{F}$ un campo conservativo? Justifique su respuesta.

P3. **[Propuesto]** Sea $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}(\phi, \theta)$ el vector posición en coordenadas esféricas, con q $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, y $\phi \in [0, \pi]$. Sea el volumen $\Omega = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, a \leq r \leq b\}$, cuya superficie $S = \partial\Omega$ está orientada hacia el exterior. Sean $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fuciones de clase $\mathcal{C}^1$ relacionada por $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = rf(r^2)\hat{\mathbf{r}}$

(a) Demuestre que se cumple

$$\frac{1}{4\pi}\oiint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = b^3f(b^2) - a^3f(a^2) \tag{5}$$

(b) Sea $\mathcal{C}$ una curva regular por partes. Sus extremos están dados por los puntos $A = (0,0,0)$ y $B = (0,0,a)$, recorrida desde A hacia B Verifique que

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} f(u)du \tag{6}$$