Auxiliar 1

Profesor: Raúl Gormaz
Auxiliar: Edgardo Rosas

P1. Un campo vectorial $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tiene simetría cilíndrica si es de la forma

$$\mathbf{F}(\rho, \phi, z) = f(\rho)\hat{\boldsymbol{\rho}}, \tag{1}$$

con $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$.

(a) Encuentre $\boldsymbol{\nabla} f$

(b) Calcule $\boldsymbol{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}$

(c) A partir de (a) y (b) calcule $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}$

(d) Calcule $\boldsymbol{\nabla} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}$

(e) A partir de (a) y (d) encuentre $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$

(f) Encuentre todos los campos con simetría cilíndrica que además son selenoides

P2. Sea $\mathbf{r}(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva de nivel del campo escalar $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

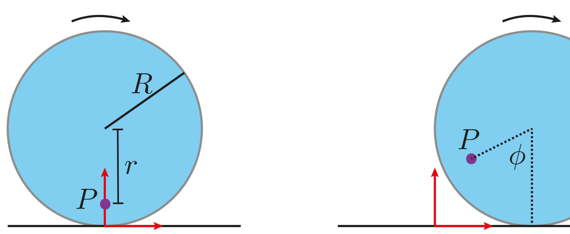
(a) Muestre que $\nabla\varphi$ es perpendicular a la curva de nivel descrita por $\mathbf{r}(t)$.

Considere la función real $G(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, cuya expresión está dada por $G(t) = \|\mathbf{r}(t)\|^2$.

(b) Encuentre una expresión para $G'(t)$.

(c) Suponiendo que $\mathbf{r}(t)$ es de módulo constante, demuestre que $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)$ es perpendicular a $\mathbf{r}(t)$.

P3. La curva cicloide se puede definir a partir del movimiento de un punto P de una rueda de radio R que rueda sin resbalar (Ver Fig 3). Encuentre una parametrización de la curva y determine para que valores de r la curva es regular.



P4. Se define el sistema de coordenadas parabólicas (λ, μ, φ) con la transformación

$$\lambda = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z}, \quad \mu = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z}, \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

(a) Exprese el vector posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ como función de las coordenadas (λ, μ, φ)

(b) Obtenga los factores de escala $h_\lambda, h_\mu, h_\varphi$, y los vectores unitarios $\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}$

P5. **[Propuesto]** En electromagnetismo un dipolo eléctrico puntual tiene un potencial cuya expresión en coordenadas esféricas está dada por

$$V(r,\phi,\theta) = \alpha\frac{\cos(\phi)}{r^2}, \tag{3}$$

con $\alpha = 2Qd/4\pi\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$.

(a) Si el campo eléctrico $\mathbf{E}$ satisface la relación $\mathbf{E} = -\nabla V$, calcule el campo eléctrico generado por el dipolo puntual eléctrico.

(b) Considerando que el momento dipolar es un vector orientado en el eje z cuyo módulo satisface $\|\mathbf{p}\| = 2Qd$, demuestre que el campo eléctrico se puede escribir como

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{\|\mathbf{r}\|^3}. \tag{4}$$