

MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones**Profesor:** Alexis Fuentes**Auxiliares:** Vicente Salinas**Dudas:** vicentesalinas@ing.uchile.cl**Auxiliar 10: EDP**

9 de noviembre de 2021

P1. Considere la EDP con las siguientes condiciones de bordes e iniciales (P):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + e^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad \forall x \in (0, L), \quad t > 0$$

$$u(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = 0 \text{ CB en } x = 0$$

$$u(L, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0 \text{ CB en } x = L$$

$$u(x, 0) = f(x) \text{ CI para } u$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \text{ CI para } \frac{\partial u}{\partial t}$$

- a) Usando el método de separación de variables de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$, pruebe que para resolver el problema anterior debe encontrarse la constante $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que el siguiente problema (P') tenga solución no trivial:

$$\alpha X(x) + X^{(4)}(x) = 0, \quad \forall x \in (0, L)$$

$$X(0) = X''(0) = 0 \text{ CB en } x = 0$$

$$X(L) = X''(L) = 0 \text{ CB en } x = L$$

- b) Pruebe que si $\alpha = 0$, la única solución del problema (P') es $X = 0$
- c) Multiplique la EDO del problema (P') por $X(x)$ y luego integre por partes para probar que toda solución de (P') satisface que:

$$\alpha \int_0^L X^2(s) ds + \int_0^L (X''(s))^2 ds$$

- d) Use la relación anterior para probar que si $\alpha > 0$ la única solución es $X = 0$
- e) Según los resultados anteriores, el problema tiene soluciones no triviales cuando $\alpha < 0$, haga el cambio $-\alpha^4 = \alpha$, con $a > 0$ y resuelva el problema (P') encontrando una solución no trivial.

Hint Recuerde que la solución de la EDO del problema (P') es de la forma:

$$X(x) = A \cosh(ax) + B \sinh(ax) + C \cos(ax) + D \sin(ax)$$

Use las condiciones de borde para encontrar el valor de las constantes y pruebe que $D \sin(ax) = 0$, con esto concluya que las soluciones no triviales se obtienen cuando $a = a_n$, con $n \in \mathbb{N}^*$, especificando quién es a_n y $X_n(x)$.

- f) Para cada a_n resuelva la ecuación del tiempo y pruebe que la n -ésima solución del problema (P), es de la forma:

$$u_n(x, t) = [A_n \cos(w_n t) + B_n \sin(w_n t)] \sin(a_n x)$$

donde debe especificar el valor de w_n en términos de a_n y datos del problema.

- g) Indique cuál es la solución del problema (P) para las condiciones iniciales:

$$f(x) = 5 \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

$$g(x) = -7 \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

- h) Considere el caso general, donde $f(x)$ y $g(x)$ se pueden expandir en serie de Fourier de senos en $[0, L]$. En este caso, escriba la solución formal $u(x, t)$ del problema (P) como una serie, escribiendo una ecuación que permita calcular A_n y B_n , en función de f, g .
- i) Escriba la solución formal para el caso de $f(x) = x(L - x)$ y $g(x) = 0$. Debe calcular los coeficientes.

P2. Resuelva la ecuación de Schrödinger con condición inicial:

$$\begin{aligned} iu_t(t, x) + u_{xx}(t, x) &= 0 \\ u(0, x) &= f(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donde las funciones $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ son integrables en la variable x .

Propuestos

Prop1. El objetivo de este problema es calcular la antitransformada de Fourier de la función $g(s) = e^{-i(\alpha s)^2}$, para ello siga el siguiente esquema:

- Encuentre una ecuación diferencial lineal de primer orden para g .
- Sea $f(x) = \check{g}(x)$, es decir, f es tal que $\hat{f}(s) = g(s)$. Utilizando adecuadamente las relaciones entre derivadas y transformadas/antitransformadas de Fourier, encuentre una ecuación diferencial lineal de primer orden para f .
- Resuelva la ecuación en términos del valor de $f(0)$.
- Calcule el valor de $f(0)$, para ello le pueden resultar útiles las integrales de Fresnel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

- Concluir que la antitransformada es $f(x) = \frac{1-i}{2\alpha} e^{\frac{ix^2}{4\alpha^2}}$

Resumen

Recuerden que la transformada es lineal

$$1. \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x) dx$$

$$2. \check{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} g(s) ds$$

$$3. \widehat{f'}(s) = is\hat{f}(s)$$

$$4. \widehat{f^{(k)}}(s) = (is)^k \hat{f}(s)$$

$$5. g'(x) = -ix\check{g}(x)$$

$$6. g^{(k)}(x) = (-ix)^k \check{g}(x)$$

$$7. f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s)ds$$

$$8. \widehat{f * g}(s) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(s) \hat{g}(s)$$

$$9. \widehat{f(x-x_0)}(s) = e^{-isx_0} \hat{f}(s)$$

$$10. \widehat{e^{is_0x} f}(x)(s) = \hat{f}(s-s_0)$$

$$11. \widehat{f(ax)}(s) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$12. \widehat{f(-x)}(s) = \hat{f}(-s)$$

	$f(x)$	$\hat{f}(s)$
1	$\begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+is}$
2	$e^{-ax^2}, a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{s^2}{4a}}$
3	$e^{-a x }, a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + s^2}$
4	$\frac{1}{a^2 + x^2}, a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a} e^{-a s }$
5	$\begin{cases} k & x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} k \frac{\text{sen}(bs)}{s}$

Serie de Fourier

Sea $f : [-\mathcal{T}, \mathcal{T}] \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f admite un desarrollo en *Serie de Fourier* en $[-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$ si existen escalares $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) \right], \quad \forall x \in [-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$$

$$a_n = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) dx$$

P1. Considere la EDP con las siguientes condiciones de bordes e iniciales (P):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + e^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad \forall x \in (0, L), \quad t > 0$$

$$u(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = 0 \text{ CB en } x = 0$$

$$u(L, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0 \text{ CB en } x = L$$

$$\left(\begin{array}{l} u(x, 0) = f(x) \text{ CI para } u \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \text{ CI para } \frac{\partial u}{\partial t} \end{array} \right)$$

- a) Usando el método de separación de variables de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$, pruebe que para resolver el problema anterior debe encontrarse la constante $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que el siguiente problema (P') tenga solución no trivial:

$$\alpha X(x) + X^{(4)}(x) = 0, \quad \forall x \in (0, L)$$

$$X(0) = X''(0) = 0 \text{ CB en } x = 0$$

$$X(L) = X''(L) = 0 \text{ CB en } x = L$$

$\Rightarrow u \neq 0$

- b) Pruebe que si $\alpha = 0$, la única solución del problema (P') es $X = 0$
 c) Multiplique la EDO del problema (P') por $X(x)$ y luego integre por partes para probar que toda solución de (P') satisface que:

$$\alpha \int_0^L X^2(s) ds + \int_0^L (X''(s))^2 ds$$

- d) Use la relación anterior para probar que si $\alpha > 0$ la única solución es $X = 0$
 e) Según los resultados anteriores, el problema tiene soluciones no triviales cuando $\alpha < 0$, haga el cambio $-\alpha^4 = \alpha$, con $a > 0$ y resuelva el problema (P') encontrando una solución no trivial.

Hint Recuerde que la solución de la EDO del problema (P') es de la forma:

$$X(x) = A \cosh(ax) + B \sinh(ax) + C \cos(ax) + D \sin(ax)$$

$$D \sin(ax) = 0$$

Use las condiciones de borde para encontrar el valor de las constantes y pruebe que $D \sin(ax) = 0$, con esto concluya que las soluciones no triviales se obtienen cuando $a = a_n$, con $n \in \mathbb{N}^*$, especificando quién es a_n y $X_n(x)$.

- f) Para cada a_n resuelva la ecuación del tiempo y pruebe que la n-sima solución del problema (P), es de la forma:

$$u_n(x, t) = [A_n \cos(w_n t) + B_n \sin(w_n t)] \sin(a_n x)$$

donde debe especificar el valor de w_n en terminos de a_n y datos del problema.

- g) Indique cuál es la solución del problema (P) para las condiciones iniciales:

$$f(x) = 5 \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

$$g(x) = -7 \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

- h) Considere el caso general, donde $f(x)$ y $g(x)$ se pueden expandir en serie de Fourier de senos en $[0, L]$. En este caso, escriba la solución formal $u(x, t)$ del problema (P) como una serie, escribiendo una ecuación que permita calcular A_n y B_n , en función de f, g .

P1] $u(x, t) = X(x) T(t)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x) T(t)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = X^{(4)}(x) T(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x) T'(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x) T''(t)$$

Reemplazando

$$X(x) T''(t) + e^2 X^{(4)}(x) T(t) = 0 \quad \forall x \in (0, L) \quad \forall t > 0$$

$$X(x) T''(t) = -e^2 X^{(4)}(x) T(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{-X^{(4)}(x)}{X(x)} = \kappa \quad \text{GR}$$

$$\Rightarrow -X^{(4)}(x) = \alpha X(x)$$

$$\Rightarrow X^{(4)}(x) + \alpha X(x) = 0 \quad \forall x \in (a, L)$$

$$\text{Si: } T(t) \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$$

↑
No puede pasar

$$u(a, t) = 0 \Leftrightarrow X(a) T(t) = 0 \quad \forall t > 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a, t) = 0 \Leftrightarrow X''(a) T(t) = 0 \quad \forall t > 0$$

Es necesario que $X(a) = X''(a) = 0$, para
que $T(t)$ no sea siempre 0

De igual manera

$$u(L, t) = 0 \Leftrightarrow X(L) T(t) = 0 \quad \forall t > 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0 \Leftrightarrow X''(L) T(t) = 0 \quad \forall t > 0$$

$$\Rightarrow X(L) - X^{\wedge}(L) = 0$$

$$\Rightarrow \kappa X(x) + X^{(4)}(x) = 0 \quad \forall x \in (0, L)$$

$$X(0) = X''(0) = 0 \quad (\square)$$

$$X(L) = X''(L) = 0 \quad (\star)$$

b) \(\alpha = 0\)

$$\Rightarrow X^{(4)}(x) = 0$$

$$\Rightarrow X(x) = K_1 + K_2 x + K_3 x^2 + K_4 x^3$$

de $\square$

$$K_1 = 0 = X(0), \quad X''(x) = 2K_3 + 6K_4 x$$

$$X'(0) \Rightarrow 2K_3 = 0$$

$$\Rightarrow K_3 = 0$$

$$\Rightarrow X(x) = K_2 x + K_4 x^3$$

$$X'(x) = 6K_4 x$$

$$\textcircled{*} X'(L) = 6K_4 L = 0 \Rightarrow K_4 = 0$$

$$X(x) = K_2 x$$

$$X(L) = 0 \Rightarrow K_2 = 0$$

$$X(x) \equiv 0$$

$$\textcircled{c) } \alpha X(x) + X^{(4)}(x) = 0 \quad / \cdot X(x)$$

$$\alpha X(x)^2 + X^{(4)}(x) X(x) = 0 \quad / \int_0^L dx$$

$$\alpha \int_0^L X(x)^2 dx + \underbrace{\int_0^L \frac{X(x)}{u} \underbrace{X^{(4)}(x)}_{\frac{d^4 u}{dx^4}} dx}_{=0} = 0$$

$$\int_0^L \underbrace{X(x)}_u \underbrace{X^{(4)}(x)}_{dv} dx = \overset{0 \text{ (er Rand)}}{\cancel{X(x) X^{(3)}(x)}} \Big|_0^L - \int_0^L X'(x) X^{(3)}(x) dx$$

$$v = X^{(3)}(x) = - \int_0^L \underbrace{X'(x)}_u \underbrace{X^{(4)}(x)}_{dv} dx \rightarrow v = X^{(2)}(x)$$

$$= - \left(\cancel{X'(x) X^{(2)}(x)} \Big|_0^L - \int_0^L X''(x)^2 dx \right)$$

$$= \int_0^L X''(x)^2 dx$$

Ersetzt man

$$\underbrace{\int_0^L X^2(x) dx}_{\neq 0} + \underbrace{\int_0^L X''(x)^2 dx}_{\neq 0} = 0 \quad (V)$$

$= 0 \qquad \qquad \qquad = 0$

$$d) \text{ Si } \kappa > 0, \text{ Si } X(x) \neq 0$$

$$(N) \Rightarrow \kappa \int_0^L X^2(x) dx = 0$$

$$x_0 \in (0, L)$$

$$|X(x_0)| > 0 \Rightarrow \kappa \int_0^L X^2(x) dx > 0 \quad *$$

$$\text{Solo } X \equiv 0$$

$$e) \kappa = -a^4$$

$$\Rightarrow -a^4 X(x) + X^{(4)}(x) = 0$$

$$X(0) = X''(0) = 0 \quad (1)$$

$$X(L) = X''(L) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Solucion } X(x) = A \cosh(ax) + B \sinh(ax) + C \cos(ax) + D \sin(ax)$$

(1)

$$A + C = 0 \quad \text{y} \quad a^2 A - a^2 C = 0 \quad \begin{matrix} x'(0) = 0 \\ x''(0) = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow A = C = 0$$

(2)

$$x(0) = 0 \Rightarrow B \sinh(aL) + D \sin(aL) = 0 \quad (3)$$

$$x'(0) = 0 \Rightarrow B a^2 \sinh(aL) - D a^2 \sin(aL) = 0$$

$$\Rightarrow B \sinh(aL) - D \sin(aL) = 0 \quad (4)$$

Sumando (3) + (4)

$$2 B \sinh(aL) = 0$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{Subst. se Anula em } x=0$$

$$\Rightarrow B = 0$$

$$\Rightarrow D \sin(aL) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se Tiene que} \\ \text{Cumplir} \end{array} \right)$$

$$X(x) = D \sin(ax)$$

$$\text{Como } D = 0 \Rightarrow X \equiv 0$$

$$\text{Imponemos que } \sin(aL) = 0$$

$$\Rightarrow a_n L = n\pi \quad , \quad n \in \{1, 2, \dots\}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$X_n(x) = D_n \sin(a_n x)$$

$$K = - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4$$

$$\frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = \alpha = -\left(\frac{N\pi}{L}\right)^4$$

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\lambda = \pm i\omega$$

$$T''(t) + \left(\frac{cN^2\pi^2}{L^2}\right)^2 T(t) = 0$$

$$T(t) = F_1 \cos\left(\frac{cN^2\pi^2}{L^2} t\right) + F_2 \sin\left(\frac{cN^2\pi^2}{L^2} t\right)$$

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos\left(\frac{cN^2\pi^2}{L^2} t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{cN^2\pi^2}{L^2} t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Principe de superposition

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{cN^2\pi^2}{L^2} t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{cN^2\pi^2}{L^2} t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$f(x) = 5 \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

$$g(x) = -7 \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

y $a(x)$ se pueden expandir en

$$u(x,0) = \sum_{N=1}^{\infty} A_N \sin\left(\frac{N\pi x}{L}\right)$$

$$= 5 \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

$$A_N = 0$$

$$\forall N \neq 4$$

$$A_4 = 5$$

Es válido por que

$$0 = \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

Si $n \neq m$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-A_n \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) \sin(n\pi x) + B_n \omega_n \cos(n\pi x) \right] \uparrow$$

$\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \omega_n) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$\begin{aligned} & \downarrow \\ & \text{for } n=1 \downarrow \\ & = -7 \sin\left(4 \frac{\pi x}{L}\right) \end{aligned}$$

$$B_n = 0 \quad \forall n \neq 4$$

$$B_4 = 0$$

$$u(x, t) = 5 \left(\cos\left(\frac{16\pi^2}{L^2} ct\right) - \frac{7L^2}{16\pi^2 c} \sin\left(\frac{16\pi^2}{L^2} ct\right) \right) \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

P2. Resuelva la ecuación de Schrödinger con condición inicial:

$$\begin{aligned}iu_t(t, x) + u_{xx}(t, x) &= 0 \\ u(0, x) &= f(x), \, t > 0, \, x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Donde las funciones $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ son integrables en la variable x .

Preguntas

