

MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Alexis Fuentes

Auxiliares: Vicente Salinas

Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl



Auxiliar 13: Funciones Complejas, C-R y Series

30 de noviembre de 2021

P1. Calcule la serie de potencias de $f(z) = \frac{1}{1-z}$, entorno a $z_0 = 0, -1, i$, también dibuje los discos de convergencia y relacione las distancias de los z_0 con $z = 1$.

P2. Calcule los radios de convergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$ *Handwritten: $\frac{n^n}{n!} \rightarrow \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \rightarrow \dots$*

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (n + 2^n) z^n$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (z+2)^{2^n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{e^{in}}$ *Handwritten: a_n*

d) $\sum_{n=0}^{\infty} (\log(n))^2 z^n$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n z^n$ *Handwritten: $3 + (-1)^n \rightarrow 3 + (-1)^n$*

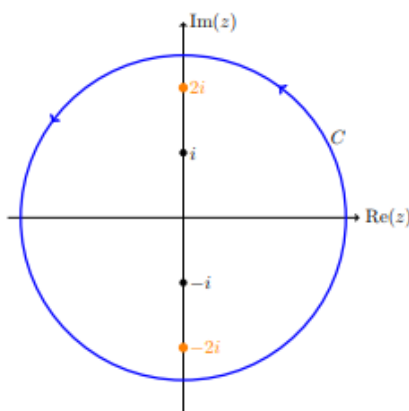
P3. Fórmula de Cauchy

Calcule las siguientes integrales vía fórmula de Cauchy:

a) $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-3)} dz$

b) $\int_{|z|=1} \frac{z}{(z-2)^2} dz$

c) $\int_C \frac{1}{(z^2+4)^2} dz$ con C descrito por:



P4. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^{-z^2}$ y $b > 0$ pruebe que:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2bx) dx = e^{-b^2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

$$\int_0^\infty e^{-y^2} \sin(2by) dy = e^{-b^2} \int_0^b e^{-y^2} dy$$

Indicación: Estudie e^{-z^2} en un contorno rectangular adecuado.

Propuestos

1. Calcule la serie de potencias de $f(z) = \frac{2}{z^2 + 1}$ en torno a $z_0 = 1$.
2. Usando adecuadamente la formula de Cauchy calcule la siguiente integral para todo r distinto de $r = 1$ y $r = 2$.

$$\oint_{|z|=r} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz$$

Resumen

Condiciones de Cuchy Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Teorema: Una función compleja es derivable si y solo si cumple las condiciones de Cauchy Riemann y es Frechet diferenciable .

Aproximación de Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Radio de Convergencia $R = 1/\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, con c_k el coeficiente de la serie centrada en z_0 .

Obs: El radio puede depender de z_0 **Radio de convergencia:** Si este límite existe también se puede utilizar:

$$R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Dado un camino $\Gamma \subset \Omega$ parametrizado por $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, definimos la integral compleja de f sobre Γ mediante:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

Además, con $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ y $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_a^b [u(x(t), y(t)) \dot{x}(t) - v(x(t), y(t)) \dot{y}(t)] dt \\ &\quad + i \int_a^b [u(x(t), y(t)) \dot{y}(t) + v(x(t), y(t)) \dot{x}(t)] dt \\ &= \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} + i \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

Fórmula de Cauchy

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D(p, r)} \subset \Omega$. Entonces, para todo $z_0 \in D(p, r)$ se tiene la fórmula integral de Cauchy:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(p, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ f^{(n)}(z_0) &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D(p, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \end{aligned}$$

P1. Calcule la serie de potencias de $f(z) = \frac{1}{1-z}$, entorno a $z_0 = 0, -1, i$, también dibuje los discos de convergencia y relacione las distancias de los z_0 con $z = 1$.

a) $z_0 = 0$

Idea

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Geometría $\text{con } |x| < 1$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{N=0}^{\infty} a_N z^N$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-z} = \sum_{N=0}^{\infty} z^N \quad \text{con } |z-0| < 1$$

¿Quién es a_n ? $a_n = 1$

$$\limsup \sqrt[n]{1} = 1$$

$$\sqrt[n]{8} \rightarrow 1$$

$$R = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z+1)^n$$

$$\frac{1}{2 - (z+1)} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z+1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{a_n} \cdot (z+1)^n$$

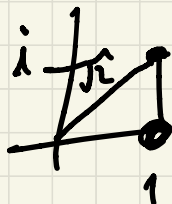
$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\boxed{R = 2}$$

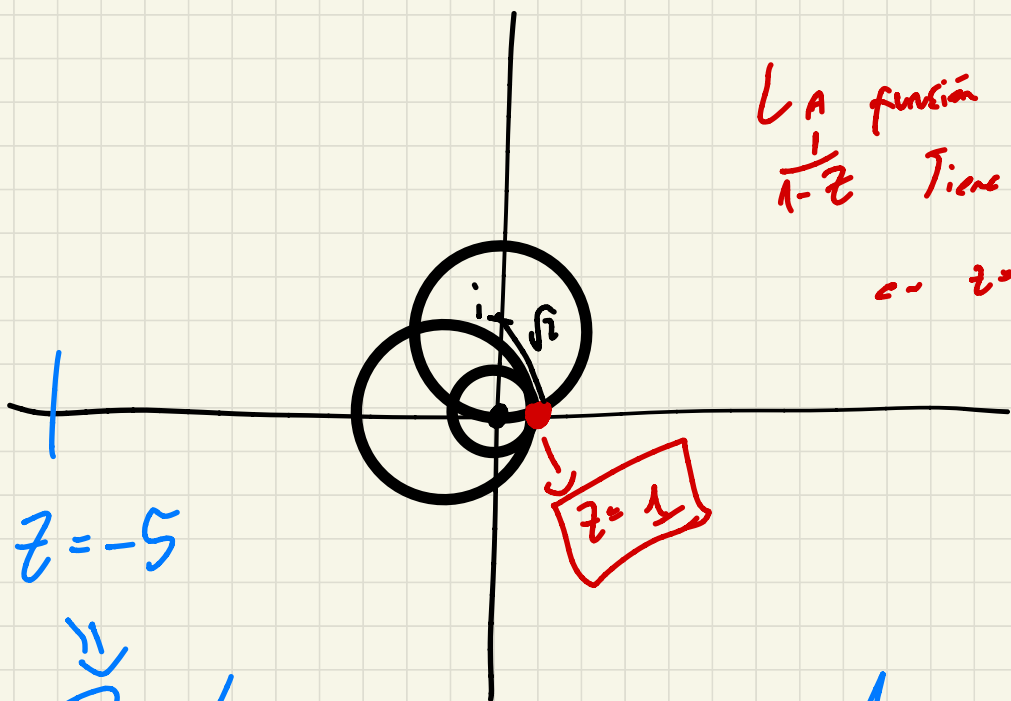
$$\frac{1}{1-i-(z-i)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-i)^n$$

$$|i+1| =$$



$$R = \sqrt{2}$$



La función $\frac{1}{1-z}$ Tiene problema en $z=1$

$$z = -5$$

$$\Downarrow$$

$$R = 6$$

$$\frac{1}{z-z}$$

S. hago serie
entorno a $z_0=0 \Rightarrow R=2$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-i-(z-i)} = \frac{1}{(1-i)\left(1-\frac{z-i}{1-i}\right)}$$

$$= \frac{1}{1-i} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{(1-i)^k} \right)$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{(1-i)} \cdot \frac{1}{(1-i)^k}$$

$$\Rightarrow R = \limsup \sqrt[k]{|1-i|^k}$$

$$= \sqrt{2}$$

P2. Calcule los radios de convergencia de las siguientes series:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{e^{in}}$$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} (n + 2^n) z^n$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} (\log(n))^2 z^n$$

$$e) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (z + 2)^{2^n}$$

$$f) \sum_{n=0}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n z^n$$

$$a) a_n = \frac{n^n}{n!} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Buena idea} \\ \text{user } R = \limsup \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \end{array} \right)$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n^n}{n!}}{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\limsup \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e} \Rightarrow R = e^{-1}$$

$$b) a_n = e^{-in}$$

$$|a_n| = |e^{-in}| = \sqrt{\cos(-n)^2 + \sin(-n)^2} = 1$$

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = 1$$

$$c) a_n = (n + 2^n) \approx 2^n$$

$\uparrow$
 n grande

Conjecture que $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 2$

Pero n grande

$$\limsup \sqrt[n]{2^n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{2 \cdot 2^n}$$

$$\begin{array}{ccc} \limsup 2 & \leq & \text{---} \leq \limsup \sqrt[n]{2} \cdot 2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2 & \Rightarrow & 2 \end{array}$$

$$R = \frac{1}{2}$$

Remember que
4 vezes R^{-1}
é que calculamos

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} (\log(n))^2 z^n$$

$$a_n = (\log(n))^2$$

$$\limsup \left(\frac{\log(n)}{\log(n+1)} \right)^2 = \overline{L}$$

$$L = \lim \frac{\log(n)}{\log(n+1)} \Rightarrow \overline{L} = L^2$$

$$L \sim \frac{\log(n)}{\log(n+1)} \stackrel{L'H}{=} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow \bar{L} = \boxed{1 = R}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (z+2)^{(2^n)}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z+2)^k$$

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{s. } k \notin 2^{\mathbb{N}} \\ \left(\log_2(k) \right)^2 & k = 2^n \end{cases}$$

$$R = \limsup \left| \frac{\log_2(k)}{\log_2(k+1)} \right|^2 = 1^2 = 1$$

$$f) \sum_{n=0}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n z^n$$

$$\limsup \sqrt[n]{(3 + (-1)^n)^n} = \limsup \sqrt[n]{3+1}$$

Entonces la sucesión máxima $\phi(n) = 2n$ es 4

$$R = \frac{1}{4}$$

$$3 + (-1)^n \leq 3 + 1$$

$$3 + (-1)^n$$

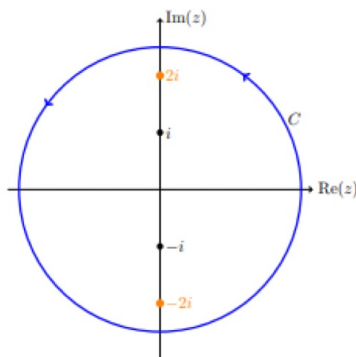
P3. Fórmula de Cauchy

Calcule las siguientes integrales vía fórmula de Cauchy:

a) $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-3)} dz$

b) $\int_{|z|=1} \frac{z}{(z-2)^2} dz$

c) $\int_C \frac{1}{(z^2+4)^2} dz$ con C descrito por:



a)
$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-3)} dz = \int_{|z|=1} \left(\frac{e^z}{z-3} \right) dz \stackrel{\text{Cauchy}}{=} \frac{e^z}{z-3} \Big|_{z=0} \cdot (2\pi i)$$

$\downarrow$
Disco centrado en 0
y Radio 2

$$= \frac{e^0}{-3} \cdot (2\pi i)$$
$$= \boxed{-\frac{2\pi i}{3}}$$

$$\int \frac{e^z}{z(z-3)} dz = \int \frac{e^z}{(-3)} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-3} \right) dz$$

$$|z|=4$$

$$= (2\pi i) \left(\frac{e^0}{(-3)} - \frac{e^3}{(-3)} \right)$$

$$= (2\pi i) \left(\frac{e^3 - 1}{3} \right)$$

$$b) \int_{|z|=1} \frac{z}{(z-2)^2} dz = \int_{|z|=1} \frac{\frac{z(z-\frac{1}{2})}{(z-\frac{1}{2})^2}}{z-\frac{1}{2}} dz \quad \rightarrow f(z)$$

$$z_0 = \frac{1}{2} \quad = 2\pi i f(z_0) = 0$$

$$c) \int \frac{z}{(z^2+4)^2} dz = \int \frac{1}{(z+2i)^2} \cdot \frac{1}{(z-2i)^2} dz$$

$$\int \frac{-4i z}{(z^2+4)^2} dz = \int \frac{1}{(z+2i)^2} - \frac{1}{(z-2i)^2} dz$$

$$\Rightarrow \int \frac{z}{(z^2+4)^2} dz = \frac{1}{-4i} \left(\int \frac{1}{(z+2i)^2} - \frac{1}{(z-2i)^2} dz \right)$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

Al aplicar Fórmula como lo es $f(z) = z$
ambos casos son constantes $f'(z) = 0$

$$\Rightarrow \int \frac{z}{(z^2+4)^2} dz = 0$$

$\int$ entre $2i$ y $-2i$

P4. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^{-z^2}$ y $b > 0$ pruebe que:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2bx) dx = e^{-b^2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

$$\int_0^\infty e^{-y^2} \cos(2by) dy = e^{-b^2} \int_0^b e^{y^2} dy$$

Indicación: Estudie e^{-z^2} en un contorno rectangular adecuado.

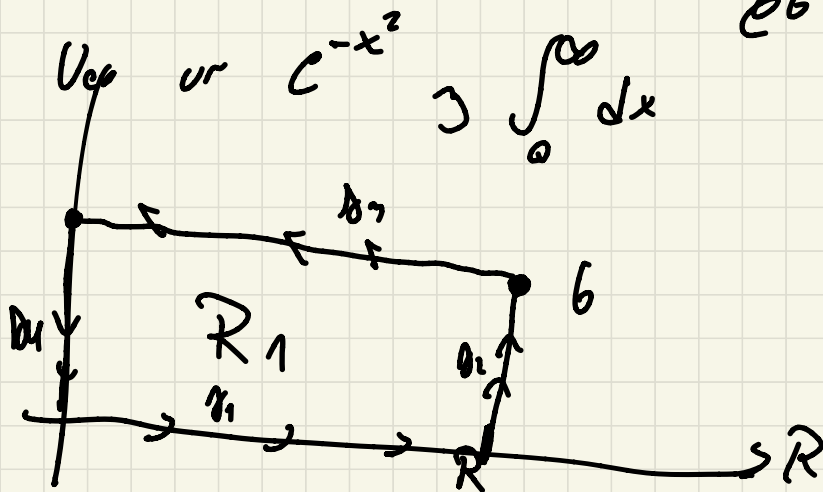
↘ Es cerrado en $\mathbb{C}$

$$\int e^{-z^2} dz = 0$$

Contorno

↑
Cauchy - Goursat

Cosas que veo en b en un los y
 en una exponencial
 e^{ib^2} , e^{ib^2}



3) luego $R \rightarrow \infty$

$$\gamma_1: \gamma_1(t) = t + 0i, \quad t \in [0, R]$$

$$\gamma_1'(t) = 1 + 0i, \quad t \in [0, R]$$

$$\gamma_2: \gamma_2(t) = R + ti, \quad t \in [0, b]$$

$$\gamma_2'(t) = i, \quad t \in [0, b]$$

$$\gamma_3: \gamma_3(t) = (R-t) + bi, \quad t \in [0, R]$$

$$\gamma_3'(t) = -1, \quad t \in [0, R]$$

$$\gamma_4: \gamma_4(t) = (b-t)i, \quad t \in [0, b]$$

$$\gamma_4'(t) = -i, \quad t \in [0, b]$$

$$\int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz = 0 = \int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_3} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_4} e^{-z^2} dz$$

$$= \int_0^R e^{-t^2} dt + \int_0^b e^{-(R+ti)^2} i dt - \int_0^R e^{-(R-t+bi)^2} dt \\ - \int_0^b e^{-((b-t)i)^2} i dt$$

$$= \int_0^R e^{-t^2} dt + \int_0^b i (e^{-R^2} \cdot e^{-2Rti} \cdot e^{-t^2}) dt \\ - \int_0^R e^{-(R-t+bi)^2} dt - \int_0^b e^{-(b-ti)^2} i dt$$

$$= \int_0^R e^{-t^2} dt + i e^{-R^2} \int_0^b e^{-2Rti} \cdot e^{-t^2} dt \\ - \int_0^R e^{-u^2 - 2ubi + b^2} du - i \int_0^b e^{u^2} du$$

$$I = \left| \int_0^b e^{-2Rti} \cdot e^{-t^2} dt \right| < M$$

$$|e^{-R^2} \cdot I| < e^{-R^2} \cdot M \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Tenemos $R \rightarrow \infty$

$$0 = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \int_0^{\infty} e^{-u^2} (\cos(2ub) - i \sin(2ub)) e^{b^2} du \\ - i \int_0^b e^{u^2} du$$

Como son números complejos necesario que $\Re = 0$
 $\Im = 0$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^{\infty} e^{-u^2} \cos(2ub) e^{b^2} du$$

$$\Rightarrow e^{-b^2} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^{\infty} e^{-u^2} \cos(2ub) du$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^b e^{u^2} du \right) e^{-b^2} = \int_0^{\infty} e^{-u^2} \sin(2ub) du$$

1. Calcule la serie de potencias de $f(z) = \frac{2}{z^2 + 1}$ en torno a $z_0 = 1$.

2. Usando adecuadamente la formula de Cauchy calcule la siguiente integral para todo r distinto de $r = 1$ y $r = 2$

$$\oint_{|z|=r} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz$$

$$f(z) = \frac{2}{z^2 + 1} = \frac{2}{(z+i)(z-i)} \quad \text{operación 1}$$

$$= \frac{2}{1 - (-z^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot (-z^2)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 2 (-1)^k z^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

$$a_k = \begin{cases} 2(-1)^{\frac{k}{2}} & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

$$P2) r = 1,5 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1,5} \frac{f(z)}{z-1} dz$$

$$- f(z) = \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-2}$$

$$f(1) = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\Rightarrow \int_{|z|=1,5} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz = 2\pi i$$

$$\boxed{r = 1,5} \quad \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

$$\frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} = \sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2) \left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \right)$$

$$\int \frac{1}{z} dz =$$

$$|z|=2,5$$

$$= \int_{|z|=2,5} \underbrace{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}_{z=2} dz - \int_{|z|=2,5} \underbrace{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}_{z=1} dz$$

$$= 2\pi i \left(\sin(4\pi) + \cos(4\pi) - \sin(\pi) - \cos(\pi) \right)$$

$$= 2\pi i (0 + 1 - 0 + 1)$$

$$= \boxed{4\pi i}$$