MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 13: Funciones Complejas, C-R y Series

30 de noviembre de 2021

P1. Calcule la serie de potencias de $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, entorno a $z_0 = 0, -1, i$, también dibuje los discos de convergencia y relacione las distancias de los z_0 con $z = 1$.

P2. Calcule los radios de convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{e^{in}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n + 2^n) z^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (log(n))^2 z^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (z+2)^{2^n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n z^n$

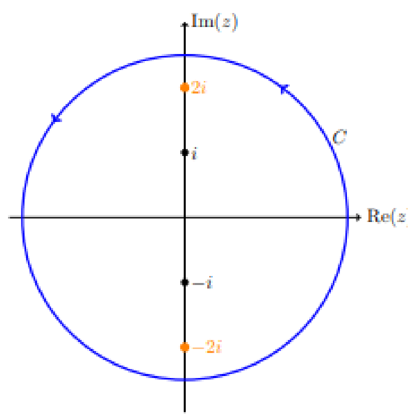
P3. Fórmula de Cauchy

Calcule las siguientes integrales vía fórmula de Cauchy:

a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-3)} dz$

b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z}{(z-2)^2} dz$

c) $\displaystyle\int_{C} \frac{1}{(z^2+4)^2} dz$ con C descrito por:



P4. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^{-z^2}$ y $b > 0$ pruebe que:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx = e^{-b^2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2} \cos(2by) dy = e^{-b^2} \int_0^{b} e^{y^2} dy$$

Indicación: Estudie e^{-z^2} en un contorno rectangular adecuado.

Propuestos

1. Calcule la serie de potencias de $f(z) = \dfrac{2}{z^2+1}$ en torno a $z_0 = 1$.
2. Usando adecuadamente la formula de Cauchy calcule la siguiente integral para todo r distinto de $r = 1$ y $r = 2$:
$$\oint_{|z|=r} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz$$

Resumen

Condiciones de Cachy Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $-\frac{\partial v}{\partial x}$

Teorema: Una función compleja es derivable si y solo si cumple las condiciones de Cauchy Riemann y es Frechet diferenciable .

Aproximación de Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Radio de Convergencia $R = 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, con c_k el coeficiente de la serie centrada en z_0.
Obs: El radio puede depender de z_0 **Radio de convergencia**: Si este límite existe también se puede utilizar: $R = \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1|}}$
Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua. Dado un camino $\Gamma \subset \Omega$ parametrizado por $\gamma : [a,b] \to \Omega$, definimos la integral compleja de f sobre Γ mediante:

$$\int_\Gamma f(z)dz \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt$$

Además, con $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ y $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ entonces se tiene:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)dz &= \int_a^b [u(x(t),y(t))\dot{x}(t) - v(x(t),y(t))\dot{y}(t)]dt \\ &\quad + i\int_a^b [u(x(t),y(t))\dot{y}(t) + v(x(t),y(t))\dot{x}(t)]dt \\ \\ &= \int_\Gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} + i\int_\Gamma \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\vec{r}\end{aligned}$$

Fórmula de Cauchy
Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D(p,r)} \subset \Omega$. Entonces, para todo $z_0 \in D(p,r)$ se tiene la fórmula integral de Cauchy:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$
$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$